

## Fractions rationnelles

## 1 Décomposition en éléments simples

**EXERCICE 1.** ●○○ *Calculs explicites de DES*

Décomposer en éléments simples :

1.  $\frac{X^3}{X^2 - 3X + 2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

5.  $\frac{X}{X^3 - 1}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

2.  $\frac{X^3 + X^2 + 1}{X^3 + X^2 + X}$  dans  $\mathbb{C}(X)$  ;

6.  $\frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 2)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

3.  $\frac{X - 1}{X^3 - 3X - 2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

7.  $\frac{n!}{X(X - 1) \dots (X - n)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

4.  $\frac{1}{(X - 1)^2(X + 1)^2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  ;

8.  $\frac{4}{(X^2 + 1)^2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

**EXERCICE 2.** ●○○ *Calcul d'une somme par DES*Simplifier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+3}{k^3 + 3k^2 + 2k}$ .En déduire la limite de  $(u_n)$ .**EXERCICE 3.** ♣ – ●●○ *Primitives de fractions rationnelles*

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$  ;

3.  $x \mapsto \frac{x}{x^4 - 16}$  ;

2.  $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$  ;

4.  $x \mapsto \frac{1}{x(1 + x^2)^2}$ .

**EXERCICE 4.** ♣/◇ – ●●○ *Inverse des polynômes de Tchebychev*Décomposer en éléments simples  $\frac{1}{T_n}$ , où  $T_n$  est le  $n$ -ème polynôme de Tchebychev.**EXERCICE 5.** ♣ – ●●○ *Identité avec sommes et racines*Soit  $n \geq 2$ , soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé, à racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Soit  $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ 

1. Écrire la décomposition en éléments simples de  $\frac{X^r}{P}$ .

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^r}{P'(\alpha_k)}$ .

3. En procédant de façon analogue, déterminer les valeurs de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k P'(\alpha_k)}$  et  $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)}$ .

**EXERCICE 6. ●●○ Inverse de  $P^2$** 

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  unitaire, à racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{P^2}$ .

**EXERCICE 7. ♣/◇ – ●●○ DES de  $\frac{P'}{P}$  et théorème de Gauss-Lucas**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  scindé non constant.

1. Expliciter en fonction des racines de  $P$  et de leur multiplicité la décomposition en éléments simples de la fraction  $\frac{P'}{P}$ .
2. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et que  $P$  est scindé à racines simples. Montrer qu'il en est de même de  $P' + \alpha P$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Montrer que les racines de  $P'$  sont des barycentres des racines de  $P$ .

**2 Autres exercices****EXERCICE 8. ●○○ Dérivée d'une fraction rationnelle**

Si  $F$  est une fraction rationnelle de  $\mathbb{K}(X)$ , représentée par le quotient  $\frac{A}{B}$ , on définit la fraction dérivée de  $F$  par  $F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$ .

1. Montrer que la définition de  $F'$  ne dépend pas du représentant  $\frac{A}{B}$  choisi pour  $F$ .
2. Déterminer le degré de  $F'$  en fonction de celui de  $F$ .

**EXERCICE 9. ●○○ Équations dans  $\mathbb{C}(X)$** 

1. Montrer qu'il n'existe pas  $F \in \mathbb{C}(X)$  telle que  $F^2 = \frac{1}{X}$ .
2. Déterminer les  $R \in \mathbb{C}(X)$  telles que  $R^2 = \frac{X^2}{(X+1)(X+2)}$ .
3. Montrer qu'il n'existe pas  $F \in \mathbb{C}(X)$  telle que  $F' = \frac{1}{X}$ .
4. Déterminer les  $R \in \mathbb{C}(X)$  telles que  $R' = \frac{1}{X^2 + 1}$ .

**EXERCICE 10. ♣/◇ – ●●○ Ensemble des valeurs d'une fonction rationnelle**

Que peut valoir l'ensemble des valeurs prises par une fonction rationnelle, associée à une fraction rationnelle  $F \in \mathbb{C}(X)$  ?

**EXERCICE 11.** ♣ – ●●○ *Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle*

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Montrer que la suite  $\left(\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence linéaire (non triviale) à coefficients constants

**EXERCICE 12.** ♣ – ●●○ *Minoration de la valeur d'un polynôme en un entier*

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  unitaire de degré  $n \geq 1$ . On note  $Q = X(X-1) \cdots (X-n)$ .

1. Montrer  $\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} P(k) \frac{1}{X-k}$ .
2. En déduire  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = n!$ .
3. En déduire  $\max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \{|P(k)|\} \geq \frac{n!}{2^n}$ .
4. Ce résultat a été obtenu en plus grande généralité dans la feuille de TD précédente.  
Comment généraliser la méthode de cet exercice ?

**EXERCICE 13.** ♣ – ●●● *Inégalités de Laguerre*

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$ . Montrer les assertions suivantes.

1. Si  $P$  est scindé, alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x) P^{(k+1)}(x) \leq P^{(k)}(x)^2$ .
2.  $P$  est scindé à racines simples ssi  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x) P^{(k+1)}(x) < P^{(k)}(x)^2$ .

## Indications

**Exercice 4.** Les coefficients dans la décomposition en éléments simples peuvent être calculés avec  $T'_n$ .

**Exercice 7.** Pour 2., étudier la fonction  $x \mapsto \frac{P'(x) + \alpha P(x)}{P(x)}$ . Pour 3., si  $\beta$  est une racine de  $P'$ , alors  $\frac{P'}{P}$  évalué en  $\beta$  vaut 0.

**Exercice 10.** Si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, étudier l'équation  $\frac{P(z)}{Q(z)} = \alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Bien clarifier si on raisonne par déductions ou par équivalence.