Semaine 26 - Groupes finis, dénombrement

1 Compléments sur les groupes finis

Ces compléments sont hors programme de première année et pour certains aussi de deuxième année. Seuls les points en gras sont exigibles.

- **Ordre d'un élément**
- **Théorème de Lagrange – cas abélien**
- Si H est un sous-groupe de G fini, $|H|$ divise $|G|$.
- Théorème de Lagrange – cas général
- **Un groupe cyclique de cardinal n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**
- Les sous-groupes d'un groupe cyclique G sont cycliques ; si d divise $|G|$, G a exactement un sous-groupe de cardinal d .
- Indicatrice d'Euler $\phi(n)$. C'est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c'est aussi le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2 Groupe symétrique

- Écriture d'une permutation
- Orbites ; elles forment une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$
- Cycle ; support d'un cycle ; transposition
- Décomposition en produit de cycles à supports disjoints
- Les transpositions engendrent S_n
- Inversions d'une permutation ; nombre d'inversions ; signature
- La signature est un morphisme de groupes
- Signature d'un p -cycle ; d'une permutation écrite en produit de cycles à supports disjoints

3 Dénombrement

- Généralités sur les ensembles finis
- Cardinal d'une union disjointe ; d'un recouvrement disjoint
- Lien entre les cardinaux et l'injectivité/la surjectivité/la bijectivité
- Si E et F sont de même cardinal, $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi injective ssi surjective
- Cardinal d'une union ; formule du crible (HP)

- Cardinal d'un produit cartésien ; d'une puissance ensembliste ; de l'ensemble des fonctions F^E ; de $\mathcal{P}(E)$
- Si $\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur E et si toutes les classes ont même cardinal r , alors il y a $\frac{|E|}{r}$ classes
- Principe des tiroirs
- Listes ; listes sans répétition ; combinaisons ; nombre d'injections ; nombre de permutations
- Démonstration combinatoire des principales formules sur les coefficients binomiaux (symétrie ; Pascal ; chef ; Vandermonde)
- Coefficients multinomiaux, dénombrement d'anagrammes
- Nombres de Bell ; formule de récurrence
- Nombres de Catalan ; définition par récurrence et formule (*rien de démontré*)
- Nombres de Stirling de deuxième espèce (*sera fait en DM*)

4 Questions de cours

- Théorème de Lagrange – cas abélien
- Calcul d'une décomposition en produit de cycles à supports disjoints
- Les transpositions engendrent S_n
- Démonstration combinatoire d'une formule sur les coefficients binomiaux (*Sans indication pour symétrie, Pascal, chef, Vandermonde*)
- Démonstration de la formule de récurrence sur les nombres de Bell (*On rappellera la définition.*)
- Dénombrement des anagrammes d'un mot