Dénombrement

1 Échauffement

EXERCICE 1. ♣ – ◐○○ *Parties de bridge*
Au bridge, une *main* est un ensemble de 13 cartes tirées dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de mains différentes y a-t-il ?
2. Quatre joueurs reçoivent des mains. Combien y a-t-il de parties différentes ?

EXERCICE 2. ♣/♢ – ◐○○ *Une erreur classique de dénombrement*
On demande à un élève de combien de façons on peut obtenir (au moins) deux valeurs identiques quand on lance 3 dés à 6 faces. Son raisonnement est le suivant : *Il y a d'abord* $\binom{3}{2} = 3$ *façons de choisir la paire de dés qui donneront des valeurs identiques. Cette valeur prise par les deux dés est arbitraire entre* 1 *et* 6. *Cela fait* 18 *possibilités. Reste à choisir la valeur du troisième dé :* 6 *valeurs possibles aussi. Pour un total de* $18 * 6 = 108$.

1. Quelle est l'erreur de raisonnement ?
2. Calculer la bonne valeur en comptant plus soigneusement les différents cas possibles.
3. Retrouver cette valeur en comptant les cas contraires.

EXERCICE 3. ◐○○ *12 personnes autour d'une table*
12 personnes, 6 hommes et 6 femmes, sont réunis pour une soirée festive.

1. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir autour d'une table circulaire comportant 12 sièges ?
2. On identifie maintenant deux configurations si on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant chaque personne d'un même nombre de sièges (ce qui revient à dire que seul l'ordre relatif des personnes nous intéresse). Combien y a-t-il de façons ?
3. Et si maintenant on ajoute en plus la contrainte que chaque homme ait deux voisines (ce qui implique aisément que chaque femme a deux voisins) ?

EXERCICE 4. ◐○○ *Petits déjeuners copieux*
Durant n jours consécutifs, vous avez le choix entre pain au chocolat et croissant pour votre petit-déjeuner. De combien de manières pouvez-vous choisir votre viennoiserie :

1. sans aucune contrainte ?
2. en ayant pris au moins une fois chaque viennoiserie ?

3. en ayant pris autant de jours chacune des viennoiseries ?

4. en ne prenant jamais la même viennoiserie deux jours d'affilée ?

5. en ne prenant jamais la même viennoiserie trois jours d'affilée ?

EXERCICE 5. ◐○○ *Involutions et points fixes*
Une involution d'un ensemble E est une permutation $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
Montrer qu'une involution d'un ensemble fini de cardinal impair a un point fixe.

EXERCICE 6. ♣ – ●○○ *Couples d'ensembles*
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E ?

2. Combien de ces couples vérifient $A \subset B$?

3. Combien vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

4. Combien vérifient $A \cup B = E$?

2 Interprétation combinatoire de formules

EXERCICE 7. ●○○ *Somme des coefficients binomiaux sur une colonne*
Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On note E l'ensemble des nombres à n chiffres avec p chiffres 1 et $n-p$ chiffres 2.

1. Quel est le cardinal de E ?

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quel est le cardinal de E_k, ensemble des nombres dans E dont le dernier 1 est en position k ?

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

EXERCICE 8. ♣ – ●●○ *Fibonacci n'aimait pas que les lapins*
Une grenouille monte un escalier de $n \geq 1$ marches, par des sauts successifs de 1 ou 2 marches. On note F_n le nombre de façons différentes d'effectuer l'ascension.

1. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci, définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

2. Soit $k \in \left[\!\!\left[0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right]\!\!\right]$. Dénombrer le nombres d'ascensions possibles comportant (exactement) k sauts de 2 marches.

3. En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n$. Interprétation graphique ?

EXERCICE 9. ♢ – ●●○ *Parties de cardinal pair et impair*
Montrer sans calcul qu'un ensemble fini non vide a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

EXERCICE 10. ♣ – ●●○ *Des chefs et des sous-chefs*
Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Montrer de façon combinatoire :

$$\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

EXERCICE 11. ♣/♢ – ●●● *Stars and bars*
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Donner une démonstration combinatoire de

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p \\ i_1+\cdots+i_p=n}} i_1 i_2 \ldots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}.$$

3 Principe des tiroirs

EXERCICE 12. ●◐○ *Deux applications du principe des tiroirs*

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers, on peut trouver $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i$ est un multiple de n.
2. Soit $\mathscr{R}$ une relation symétrique et anti-réflexive (aucun x ne vérifie $x \mathscr{R} x$) sur un ensemble fini E. Montrer qu'il existe $x \neq y$ dans E tels que

$$\left|\{z \in E, x \mathscr{R} z\}\right| = \left|\{z \in E, y \mathscr{R} z\}\right|.$$

   Montrer qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'anti-réflexivité.

EXERCICE 13. ♣/♢ – ●●◐ *Théorème d'Erdős-Szekeres*
Soient $r, s \in \mathbb{N}$. Montrer que toute suite d'au moins $(r-1)(s-1)+1$ nombres réels contient une sous-suite croissante de longueur r ou une sous-suite décroissante de longueur s.

4 Dénombrements divers

EXERCICE 14. ◐○○ *Nombres de relations*
Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de relations binaires sur E ? de relations réflexives ? de relations symétriques ?

EXERCICE 15. ♢ – ●○○ *Partitions régulières*
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble de cardinal np. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties de cardinal p.

EXERCICE 16. ●○○ *Listes à somme fixée*
On note a_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme égale à n.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Démontrer de façon combinatoire la formule $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$.
3. En déduire a_n.

EXERCICE 17. ●◐○ *Somme de cardinaux*
Soit E un ensemble à n éléments ; calculer $\sum_{X \in E} |X|$, puis $\sum_{X,Y \in E} |X \cap Y|$.

EXERCICE 18. ●◐○ *Nombres de Bell*
Soit n un entier naturel. Le n-ème *nombre de Bell* B_n est défini comme le nombre de partitions d'un ensemble E à n éléments.

1. Donner toutes les partitions possibles d'un ensemble à 0, 1, 2 ou 3 éléments.
   En déduire B_n, pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

EXERCICE 19. ♣/♢ – ●◐○ *Nombre d'involutions*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n).

EXERCICE 20. ●◐○ *Une partie dans une partie dans une partie*
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le cardinal de

$$\left\{(X,Y,Z) \in \mathscr{P}(E)^3 \mid X \subset Y \subset Z\right\}.$$

EXERCICE 21. ♢ – ●◐○ *Applications (strictement) croissantes*

1. Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a autant d'applications croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, que d'applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n+k-1]\!]$. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

EXERCICE 22. ●●○ *Parties sans entiers consécutifs*
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n/2$. Combien y a-t-il de parties de cardinal p dans $[\![1,n]\!]$, sans entiers consécutifs ?

EXERCICE 23. ♣ – ●●◐ *Des parties discriminantes*
Soit E un ensemble de cardinal n et $A_1, \dots, A_m$ des parties de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies \exists i \in [\![1, m]\!] : (x \in A_i \text{ et } y \notin A_i) \text{ ou } (x \notin A_i \text{ et } y \in A_i).$$

Montrer que $m \geq \log_2(n)$.

EXERCICE 24. ♣ – ●●◐ *Théorème de Sperner sur les antichaînes*
On appelle antichaîne de $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$ une partie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}([\![1, n]\!])$ vérifiant :

$$\forall X, Y \in \mathscr{A}, X \neq Y \implies X \not\subset Y.$$

1. Montrer qu'il existe une antichaîne de cardinal $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

2. On souhaite montrer qu'il s'agit en fait du cardinal maximal d'une antichaîne.

   (a) On appelle chaîne complète de $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$ une partie $\{C_0, \dots, C_n\} \subset \mathscr{P}([\![1, n]\!])$ telle que $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$.
   Combien y a-t-il de chaînes complètes ? Combien y en a-t-il comprenant une partie $X \subset [\![1, n]\!]$ fixée, de cardinal k ?

   (b) En déduire que si $\mathscr{A}$ est une antichaîne : $\displaystyle\sum_{A \in \mathscr{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!$

   (c) Montrer que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est maximal pour $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

   (d) Conclure.

EXERCICE 25. ♣/♢ – ●●◐ *Nombres de Catalan*
Soient (a, b) et (c, d) deux points du plan, à coordonnées entières. On suppose $a \leq c$ et $b \leq d$. On appelle chemin vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) une liste de points $\big((x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)\big)$ telle que $(a, b) = (x_0, y_0)$, $(c, d) = (x_N, y_N)$ et

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1) \text{ ou } (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k).$$

1. Quelle est la valeur de N dans la définition précédente ? Combien y a-t-il de chemins vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) ?

On considère désormais les chemins vers le nord-est de $(0, 0)$ vers (n, n) (où $n \in \mathbb{N}$) tels que chaque point (x_k, y_k) du chemin vérifie $y_k \leq x_k$. On note C_n le nombre de tels chemins : c'est le n-ème *nombre de Catalan.*

2. Soient $a > b$ deux entiers naturels. Montrer qu'il y a autant de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) touchant la diagonale $(x = y)$ que de chemins vers le nord-est de $(0, 1)$ vers (a, b).

3. En déduire que le nombre de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) ne touchant pas la diagonale est $\dfrac{a-b}{a+b}\dbinom{a+b}{a}$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

5. Montrer à partir de la définition que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

EXERCICE 26. ♣ – ●●◐ *Régions dans un cercle*
Soit $\mathscr{C}$ un cercle. On place n points distincts sur le cercle et on trace toutes les cordes reliant deux de ces points. On suppose que la situation est générique : trois cordes ne sont jamais concourantes. On cherche à déterminer le nombre R_n de régions délimitées par les cordes.

1. Déterminer R_n, pour $n \leq 4$. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
2. Quel est le nombre C_n de cordes ?
3. Quel est le nombre I_n de points d'intersection (à l'intérieur du cercle) entre cordes ?
4. On admet la formule d'Euler $R_n = 1 + L_n + I_n$. En déduire R_n.
5. Que valent R_5 et R_6 ? Quelle morale en tirer ?

Indications

Exercice 2. Soyez attentif à l'usage de l'article défini.

Exercice 9. Fixer un élément. Considérer l'application ajoutant/ôtant cet élément à une partie.

Exercice 11. Un p-uplet d'entiers naturels de somme n peut être représenté par la succession de $n+p-1$ symboles : n étoiles et $p-1$ barres verticales.

Exercice 13. Associer à chaque terme x_k de la suite le couple (a_k, b_k) où a_k (resp. b_k) est défini comme la longueur maximale d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) terminant en x_k. Puis montrer que tous ces couples sont distincts.

Exercice 15. Attention à ne pas compter plusieurs fois les mêmes configurations !

Exercice 19. Fixer un élément et distinguer selon qu'il est égal ou pas à son image par une involution.

Exercice 21. Pour 2., décaler progressivement les images vers la droite.

Exercice 25. Pour 2., si un chemin de $(0,0)$ vers (a,b) touche la diagonale, considérer le dernier point d'intersection (avant (n,n)) et faire la réflexion du chemin partiel entre $(0,0)$ et ce point d'intersection.
Pour 5., distinguer selon le dernier point d'intersection (avant (n,n)) d'un chemin avec la diagonale.