

DM 20 - Nombres de Stirling

1 Nombre de surjections, par la formule du crible

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer le nombre $S(n, p)$ de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $A_k \subset \mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, p \rrbracket)$ l'ensemble des fonctions f pour lesquelles k n'a pas d'antécédent.

1. Soient $i_1, \dots, i_k$ des indices deux à deux distincts dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.
Interpréter l'ensemble $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ et en déduire son cardinal.
2. On note $\mathcal{S}(n, p)$ l'ensemble des surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.
Exprimer $\mathcal{S}(n, p)$ en fonction des A_k .
3. En utilisant la formule du crible, en déduire que $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

2 Nombres de Stirling

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. **Nombres de Stirling de deuxième espèce.** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n, k)$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ le nombre de telles partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(a) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$.

Pour tout réel x et tout entier n , on note $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

- (b) En déduire que, pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}$.
- (c) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, soit $f \in \mathcal{S}(n, k)$. On note P_f la partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, associée à la relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \mathcal{R}_f j \iff f(i) = f(j).$$

Montrer que $P_f \in \mathcal{P}(n, k)$.

- (d) On considère $\Phi : \mathcal{S}(n, k) \rightarrow \mathcal{P}(n, k)$, définie par $\Phi(f) = P_f$. Montrer que Φ est surjective et que tout $P \in \mathcal{P}(n, k)$ a exactement $k!$ antécédents par Φ .
- (e) En déduire que $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} S(n, k)$.
- (f) Écrire la formule obtenue en (b) pour $x = p$ un entier naturel en termes des $S(n, k)$.
L'interpréter combinatoirement.

2. Nombres de Stirling de première espèce.

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \forall i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \neq x_j\}$. Pour alléger les notations, on identifie deux indices congrus modulo n . Par exemple, x_{n+1} désigne x_1 et x_{2n} désigne x_n . On introduit sur E la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mathcal{R} (y_1, \dots, y_n) \iff \exists \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = y_{i+\ell}.$$

Ainsi, le triplet $(1, 2, 3) \in E$ est en relation avec $(2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$, mais pas avec $(1, 3, 2)$.

- On appelle n -cycle une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et on note $[x_1, \dots, x_n]$ le n -cycle égal à la classe d'équivalence de $(x_1, \dots, x_n)$.
- Le support d'un n -cycle $[x_1, \dots, x_n]$ est l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$. Il ne dépend pas de l'écriture choisie pour le n -cycle. On note $\text{Supp}(C)$ le support d'un cycle C .
- Une partition en cycles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un ensemble de cycles $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ tel que $\mathcal{P} = \{\text{Supp}(C_1), \dots, \text{Supp}(C_k)\}$ est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\mathcal{P} = \text{Supp}(\mathcal{C})$.

On note $\mathcal{C}(n, k)$ l'ensemble des partitions en cycles de $\llbracket 1, n \rrbracket$, dont le support est de cardinal k . On note $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = |\mathcal{C}(n, k)|$.

- Soient $x_1, \dots, x_k$ des entiers naturels deux à deux distincts. Combien y a-t-il de cycles de support $\{x_1, \dots, x_k\}$?
- Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties. On note $n_i = |P_i|$. Combien y a-t-il de partitions en cycles de support $\mathcal{P}$?
- Illustrer graphiquement toutes les partitions et partitions en cycles de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- En considérant $\Psi : \mathcal{C}(n, k) \rightarrow \mathcal{P}(n, k)$, définie par $\Psi(\mathcal{C}) = \text{Supp}(\mathcal{C})$, montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \geq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Montrer que l'égalité a lieu ssi $k \geq n - 1$.
- Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$.

Pour tout réel x et tout entier n , on note $x^{\overline{n}} = x(x+1) \dots (x+n-1)$. On admet qu'on pourrait montrer, comme en 1.b), que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k$.

- Quelle formule obtient pour $x = 1$? L'interpréter combinatoirement.
- Après avoir établi une relation entre $x^{\overline{n}}$ et $(-x)^{\overline{n}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] (-1)^{n-k} x^k.$$

- En déduire que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=m}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right] (-1)^{k-m} = \delta_{m,n}$, où $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.