

## Semaine 27 – Dénombrement – Probabilités

## 1 Dénombrement

Reprise

## 2 Espaces probabilisés finis

- Dictionnaire des probabilités : univers, évènement, issue, évènement certain, évènement impossible, évènements élémentaires, évènement contraire, conjonction et disjonction d'évènements, évènements incompatibles
- Système complet d'évènements
- Variable aléatoire à valeurs dans un ensemble  $E$
- Notations  $(X = x)$ ,  $(X \in A)$ , etc.
- Mesure de probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini
- Probabilité uniforme
- Propriétés basiques
- La donnée d'une mesure de probabilité sur un univers fini  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est équivalente à la donnée d'une liste  $(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$  telle que  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  – la probabilité  $P$  étant entièrement déterminée par les conditions  $P(\{\omega_k\}) = p_k$ .
- Loi d'une variable aléatoire
- Variable image  $f(X)$  ; la loi de  $f(X)$  est déterminée par celle de  $X$
- Lois usuelles : loi uniforme  $\mathcal{U}(E)$ , loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ , loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , loi de Rademacher (loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ )

## 3 Conditionnement et indépendance

*L'indépendance des variables aléatoires sera vue lundi en cours.*

- Probabilité de  $B$  sachant  $A$ , avec  $P(A) > 0$
- Notations  $P_A(B)$  (le plus souvent) ou  $P(B | A)$
- $P_A : B \mapsto P_A(B)$  est une mesure de probabilité sur  $\Omega$
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales ; convention  $P(A)P_A(B) = 0$  si  $P(A) = 0$
- Formule de Bayes ; variante avec formule des probabilités totales

- Évènements indépendants
- Indépendance mutuelle pour  $n$  évènements
- Si  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants et si  $B_i = A_i$  ou  $\overline{A_i}$ , alors  $B_1, \dots, B_n$  sont mutuellement indépendants
- Application : démonstration probabiliste de la formule  $\phi(n) = n \prod_{p_k | n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ , où  $\phi$  désigne l'indicatrice d'Euler

## 4 Questions de cours

- Divers dénombrements – cf. programme précédent
- Une mesure de probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires
- Un énoncé d'une formule de probabilités
- Calcul probabiliste de l'indicatrice d'Euler  $\phi(n)$