

DS 9 de mathématiques – Corrigé

1 Des lumières sur un échiquier

1.1 Une asymptotique sur les marches aléatoires

1. Notons $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme chaque X_k prend les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$, chaque Y_k prend les valeurs 0 et 1 avec probabilité $1/2$. Donc, pour tout k , $Y_k \sim \mathcal{B}(1/2)$. De plus, par le lemme des coalitions, comme les X_k sont indépendantes, les Y_k le sont aussi.

Ainsi, $\frac{S_n + n}{2} = \sum_{k=1}^n Y_k$ est une somme de n variables aléatoires indépendantes,

suivant la loi $\mathcal{B}(1/2)$. Donc, $\frac{S_n + n}{2} \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

Comme $\frac{S_n + n}{2}$ prend toutes les valeurs de 0 à n , S_n prend toutes les valeurs de $\llbracket -n, n \rrbracket$, de même parité que n . Soit $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ de même parité que n ; on a

$$P(S_n = k) = P\left(\frac{S_n + n}{2} = \frac{n + k}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

On peut calculer l'espérance et la variance de S_n , ou bien en utilisant $\frac{S_n + n}{2}$, ou bien directement en utilisant sa définition. Chaque X_k a pour espérance 0 et variance $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1 - 0 = 1$. Donc, par linéarité, et indépendance des X_k pour la variance, on a $E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$.

2. Il s'agit d'une application directe de la formule de transfert, en utilisant le calcul de la loi de S_n , faite dans la question précédente.
3. (a) Si n est pair, le k dans la somme précédente aussi. On l'écrit $k = 2\ell$. Par changement de variable, on a donc :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{2^n} \sum_{-j \leq \ell \leq j} |2\ell| \binom{2j}{j + \ell}.$$

Le terme central ($\ell = 0$) est nul. De plus, si $\ell \geq 1$, on a $|2\ell| \binom{2j}{j + \ell} = |-2\ell| \binom{2j}{j - \ell}$ par la formule de symétrie. Donc, la somme vaut deux fois celle

sur les ℓ positifs : $E(|S_n|) = \frac{1}{2^n} \times 2 \times 2 \sum_{\ell=1}^j \ell \binom{2j}{j+\ell}$. Il n'y a plus qu'à simplifier.

(b) On décompose $\ell = (j + \ell) - j$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^j \ell \binom{2j}{j+\ell} &= \sum_{\ell=1}^j (j + \ell) \binom{2j}{j+\ell} - j \sum_{\ell=1}^j \binom{2j}{j+\ell} \\ &= 2j \sum_{\ell=1}^j \binom{2j-1}{j+\ell-1} - j \sum_{\ell=1}^j \binom{2j}{j+\ell}. \end{aligned}$$

Pour la première somme, on a utilisé la formule du chef.

(c) Si N est un entier naturel quelconque, on sait que $\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N$ par la formule du binôme de Newton. De plus, par symétrie $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$ de sorte que

$$\sum_{0 \leq k < N/2} \binom{N}{k} = \sum_{N/2 < k \leq N} \binom{N}{k}.$$

Selon la parité de N , on peut découper la somme $\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}$ en deux ou en trois

(selon qu'il y ait ou non un terme central $\binom{N}{N/2}$) et on obtient ainsi :

- $\sum_{N/2 < k \leq N} \binom{N}{k} = \frac{1}{2} \times 2^N$ si N est impair.
- $\sum_{N/2 < k \leq N} \binom{N}{k} = \frac{1}{2} \left(2^N - \binom{N}{N/2} \right)$ si N est pair.

On peut appliquer ces formules avec $N = 2j - 1$ et $N = 2j$ dans la question précédente. On a donc :

- $\sum_{\ell=1}^j \binom{2j-1}{j+\ell-1} = 2^{2j-2}.$
- $\sum_{\ell=1}^j \binom{2j}{j+\ell} = 2^{2j-1} - \frac{1}{2} \binom{2j}{j}.$

En rassemblant les calculs, on a :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{2^{n-2}} \left(2j \times 2^{2j-2} - j \times 2^{2j-1} + \frac{j}{2} \binom{2j}{j} \right) = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2}.$$

(d) On utilise la formule de Stirling pour obtenir l'équivalent suivant :

$$\binom{n}{n/2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{2}\right)^n}{\pi n \left(\frac{n}{4}\right)^n} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Avec la formule précédente, on a donc $E(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

1.2 Méthode probabiliste

4. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j}$ vaut ± 1 et donc $a_{i,j}Y_j$ suit aussi une loi de Rademacher. De plus, par le lemme des coalitions, les variables $a_{i,j}Y_j$ sont indépendantes. Donc, le n -uplet $(a_{i,1}Y_1, \dots, a_{i,n}Y_n)$ a la même loi que $(X_1, \dots, X_n)$. Donc, les sommes des n composantes formant ces n -uplets ont aussi la même loi : R_i a la même loi que S_n .

5. Par linéarité, $E(R) = \sum_{i=1}^n E(|R_i|) = nE(|S_n|)$. Ceci ne dépend que de n et l'équivalent s'obtient en multipliant par n celui trouvé à la question 3.d)

6. Comme $E(R) = E_n$, il existe au moins une issue $\omega \in \Omega$ telle que $R(\omega) \geq E_n$. On choisit un tel ω et on pose $y_j = Y_j(\omega)$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right| = \sum_{i=1}^n |R_i(\omega)| = R(\omega) \geq E_n.$$

7. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit x_i valant ± 1 , avec le même signe que $\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j$. Ainsi,

$$x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right|. \text{ Alors,}$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}x_iy_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right| \geq E_n.$$

2 Nombres eulériens

1. Pour $n = 1$, la seule permutation est l'identité et elle a 0 ascension. Donc, $\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1$.

Pour $n = 2$, l'identité a 0 ascension et la transposition $(1 \ 2)$ en a 1. Donc, $\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle =$

$$\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1.$$

Pour $n = 3$, seule l'identité a 2 ascensions ; seule la permutation envoyant 3 sur 1 ; 2 sur 2 et 1 sur 3 (c'est-à-dire la transposition $(1 \ 3)$) en a 0 ; les autres en ont donc

2. Donc, $\left\langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1$ et $\left\langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 6 - 2 = 4$.

2. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. L'indice i est une ascension dans $\sigma \circ \tau$ ssi $\sigma \circ \tau(i) < \sigma \circ \tau(i+1)$ ssi $\sigma(n+1-i) < \sigma(n-i)$ ssi $n-i$ n'est pas une ascension dans σ . (on constate que $n-i$ décrit bien tous les entiers de 1 à $n-1$) Or, dans une permutation, la somme du nombre d'ascensions et de non-ascensions est toujours $n-1$. Donc, s'il y a k ascensions dans σ , il y a $n-1-k$ non ascensions dans σ et donc $n-1-k$ ascensions dans $\sigma \circ \tau$.
- (b) L'application $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$; en fait, comme $\tau^2 = \text{id}$, c'est même une involution de $\mathcal{S}_n$. D'après la question précédente, cette involution échange les permutations ayant k ascensions avec celles en ayant $n-1-k$. Il y en a donc autant, d'où la formule de symétrie.
3. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- Si $i \leq r-1$, on a $\sigma(i) = x_i > x_{i+1} = \sigma(i+1)$ et donc i n'est pas une ascension.
 - Si $i = r-1$, i est une ascension ssi $x_r < y_1$.
 - Si $i \geq r$, i n'est pas une ascension car $\sigma(i) = y_{i-r} > y_{i+1-r} = \sigma(i+1)$.
- Ainsi, σ aura exactement une ascension ssi $x_r < y_1$. Pour que ceci ait un sens, il convient déjà d'exclure $X = \emptyset$ et $X = \llbracket 1, n \rrbracket$. Et quand X et Y sont non vides, $x_r < y_1$ ssi $\min X < \max Y$ ssi X n'est pas de la forme $\llbracket k, n \rrbracket$, pour un $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On exclut donc $n-1$ autres parties, pour un total de $n+1$ parties.
- (b) Soit σ une permutation ayant exactement une ascension. Notons i cette ascension et définissons $X = \{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$ et $Y = \{\sigma(i+1), \dots, \sigma(n)\}$. Il est clair que X et Y sont non vides et complémentaires l'un de l'autre. De plus, comme $1, \dots, i-1$ ne sont pas des ascensions, on a $\sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(i)$ et de même $\sigma(i+1) > \dots > \sigma(n)$. Ceci montre que σ est la permutation associée à X par la construction de la question précédente.
- De plus, si $X \neq X'$ sont des parties distinctes, les permutations σ et σ' correspondantes ne sont pas les mêmes. En effet,
- Si X et X' n'ont pas le même cardinal, l'ascension de σ et de σ' n'est pas le même indice.
 - Si X et X' ont le même cardinal r , il y aura un indice $i \leq r$ tel que $x_i \neq x'_i$ et alors, $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$, donc $\sigma \neq \sigma'$.
- Ceci montre qu'une seule partie X correspond à un σ avec une unique ascension.
- (c) Les deux questions précédentes montrent qu'il y a une bijection entre l'ensemble des permutations ayant exactement une ascension et l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$, auquel on a enlevé $n+1$ parties spéciales.
- Donc, $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 2^n - (n+1)$.
4. Pour cette question, il est plus agréable d'identifier une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec la liste de valeurs $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.
- Toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être obtenue de façon unique ainsi :

- On choisit une permutation de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- On intercale n dans la liste des $n-1$ valeurs écrite (ou bien avant la première ; ou bien après la dernière ; ou bien entre deux).

Si on place n en première position ou juste après un indice où il y avait une montée, on constate rapidement que le nombre de montées reste le même ; sinon, le nombre de montées est augmenté de 1.

On en déduit que pour obtenir des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec k montées, il y a deux possibilités :

- Ou bien, on considère une permutation de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ avec $k-1$ montées et on choisit comme emplacement pour n la dernière position ou après une non-montée, pour un total de $(n-2-(k-1))+1 = n-k$ choix.
- Ou bien, on considère une permutation de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ avec k montées et on choisit comme emplacement pour n la première position ou après une montée, pour un total de $k+1$ choix ;

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (n-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle + (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle.$$

3 Théorème de Cramér

3.1 Étude de K et K^*

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par la formule de transfert, on a :

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^r e^{tx_k} P(X = x_k).$$

Tous les termes de cette somme sont strictement positifs, donc $E(e^{tX})$ aussi. Donc, $K(t) = \ln(E(e^{tX}))$ est bien défini ; de plus, la formule avec la somme montre que $t \mapsto E(e^{tX})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; donc K aussi par composition.

2. Notons $f(t) = E(e^{tX})$. En dérivant dans la formule précédente, on a :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^r x_k e^{tx_k} P(X = x_k) = E(Xe^{tX})$$

par une nouvelle application de la formule de transfert. De même, $f''(t) = E(X^2 e^{tX})$. Comme $K(t) = \ln f(t)$, on a

$$K'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})}, \text{ puis } K''(t) = \frac{E(X^2 e^{tX})E(e^{tX}) - E(Xe^{tX})^2}{E(e^{tX})^2}.$$

3. Il suffit de montrer que K'' est strictement positive. Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $Xe^{tX/2}$ et $e^{tX/2}$ nous apprend que :

$$E(Xe^{tX/2} \times e^{tX/2})^2 \leq E(X^2 e^{tX})E(e^{tX}),$$

de sorte que $K'' \geq 0$. De plus, on a l'égalité $K''(t) = 0$ ssi $Xe^{tX/2}$ et $e^{tX/2}$ sont presque sûrement colinéaires ssi X est presque sûrement colinéaire à la fonction constante égale à 1 ssi X est presque sûrement constante. Or, ceci est exclu. Donc, $K'' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

4. (a) • On a $K(0) = \ln(E(e^0)) = \ln(1) = 0$, donc $f_x(0) = 0$.
• $f'_x(0) = x - K'(0) = x - E(X)$, par la question 2. Donc, $f'_x(0) > 0$ par hypothèse sur x .
• L'expression de $E(e^{tX})$ par la formule de transfert donne $E(e^{tX}) \sim e^{tx_r} P(X = x_r)$, quand $t \rightarrow +\infty$. Comme ces quantités tendent vers $+\infty$, on peut passer au $\ln$ et en déduire que $K(t) \sim tx_r$, quand $t \rightarrow +\infty$. On peut donc écrire $f_x(t) = tx - tx_r + o(t) = t(x - x_r + o(1))$, quand $t \rightarrow +\infty$. Comme $x < x_r$, f_x tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
- (b) La dérivée de f_x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (donc f_x est strictement concave) et est strictement positive en 0. Elle ne peut pas être strictement positive sur $\mathbb{R}$, sinon f_x serait elle-même strictement croissante ce qui contredit la limite trouvée en $+\infty$. Donc, par le TVI et la stricte monotonie de f'_x , f'_x s'annule en un unique point $t_x > 0$ sur $\mathbb{R}$; donc f_x admet un unique extremum local (en t_x) sur $\mathbb{R}$. Comme f_x est strictement croissante avant t_x et strictement décroissante après, f_x admet un maximum en t_x .
5. On a déjà dit que $f'_x(t_x) = 0$ donc $K'(t_x) = x$. La fonction K' étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I . On a $K'(0) = E(X)$, donc $E(X) \in I$. De plus, en $+\infty$, $E(e^{tX}) \sim e^{tx_r} P(X = x_r)$ et $E(Xe^{tX}) \sim x_r e^{tx_r} P(X = x_r)$ si $x_r \neq 0$. Donc, quand $x_r \neq 0$, $K'(t) = \frac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})} \rightarrow x_r$, quand t tend vers $+\infty$. Ceci montre que $]E(X), x_r[\subset I$ si $x_r \neq 0$. Et si $x_r = 0$, le numérateur $E(Xe^{tX})$ tend vers 0 en $+\infty$ tandis que le dénominateur $E(e^{tX})$ tend vers $P(X = x_r)$, de sorte qu'on a encore $K'(t) \rightarrow 0 = x_r$ et la même conclusion reste valide.
- Notons g la bijection réciproque de K' sur $]E(X), x_r[$. Par le théorème de la bijection, g est continue (même $\mathcal{C}^\infty$). Par définition, on a

$$K^*(x) = xt_x - K(t_x) = xg(x) - K \circ g(x),$$

de sorte que K^* est continue (même $\mathcal{C}^\infty$) par opérations élémentaires.

3.2 Une application

6. On a $E(e^{tX}) = \frac{1}{2}(1 + e^t)$ par la formule de transfert. Donc,

$$K(t) = \ln(1 + e^t) - \ln 2.$$

7. Par la question 5, t_x vérifie $K'(t_x) = x$. On calcule $K'(t) = \frac{e^t}{1 + e^t} = 1 - \frac{1}{1 + e^t}$. On a donc $K'(t) = x \iff \frac{1}{1 + e^t} = 1 - x \iff e^t = 1 - \frac{1}{1 - x} \iff t = \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right)$. C'est donc la valeur de t_x .
On a alors

$$\begin{aligned} K^*(x) &= xt_x - K(t_x) = x \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{1 - x}\right) + \ln 2 \\ &= x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) + \ln 2. \end{aligned}$$

8. Notons $\gamma = \alpha + 1/2 \in]1/2, 1[$. Par la formule de symétrie, on a

$$U_n = 2 \sum_{k \in B_n} \binom{n}{k},$$

où $B_n = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid k \geq \gamma n\}$.

Considérons n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(1/2)$.

Si $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a $P(S_n \geq \gamma n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \in B_n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^{n+1}} U_n$. Or, comme $\gamma \in]1/2, 1[$ (avec $1/2$ l'espérance de X_1 et 1 sa plus grande valeur prise avec probabilité strictement positive), le théorème de Cramer s'applique et

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq \gamma n) \rightarrow -K^*(\gamma).$$

Donc,

$$-\ln 2 + \frac{1}{n} \ln U_n \rightarrow -\ln 2 - \gamma \ln \gamma - (1 - \gamma) \ln(1 - \gamma).$$

En simplifiant les $\ln 2$ et en remplaçant γ par sa valeur :

$$\frac{1}{n} \ln U_n \rightarrow -(1/2 + \alpha) \ln(1/2 + \alpha) - (1/2 - \alpha) \ln(1/2 - \alpha).$$

En passant à l'exponentielle :

$$U_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln U_n\right) \rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{2} + \alpha)^{\frac{1}{2} + \alpha} (\frac{1}{2} - \alpha)^{\frac{1}{2} - \alpha}}.$$

3.3 Démonstration du théorème

9. (a) Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^{tx}$, on a $P(S_n \geq nx) = P(e^{tS_n} \geq e^{tnx})$. Par inégalité de Markov, comme $e^{tS_n} \geq 0$, on a ainsi :

$$P(S_n \geq nx) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{tnx}}.$$

On a $E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k})$ par indépendance des X_k (donc des e^{tX_k} via le lemme des coalitions). Or, toutes les e^{tX_k} ont la même loi que e^{tX} . Donc, $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX})^n$.

- (b) Par croissance de $\ln$, l'inégalité précédente donne :

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) \leq -tx + \ln E(e^{tX}) = -(tx - K(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En prenant l'inf sur t dans le membre de droite, on obtient par définition $-K^*(x)$. Donc, $\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) \leq -K^*(x)$.

10. Un changement de probabilité.

- (a) Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(S_n = u) &= \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ x_1 + \dots + x_n = u}} P((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) \\ &= \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ x_1 + \dots + x_n = u}} P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ x_1 + \dots + x_n = u}} P_t(X_{1,t} = x_1) \dots P_t(X_{n,t} = x_n) e^{-tu} E(e^{tX})^n \\ P(S_n = u) &= e^{-tu} E(e^{tX})^n P_t(S_{n,t} = u) \text{ par indépendance des } X_{k,t}. \end{aligned}$$

- (b) On a $P(S_n \in [nx, n(x + \delta)]) = \sum_{u \in [nx, n(x + \delta)]} P(S_n = u)$ par additivité, avec une formule analogue pour $S_{n,t}$ et P_t . Avec la question précédente :

$$\begin{aligned} P(S_n \in [nx, n(x + \delta)]) &= \sum_{u \in [nx, n(x + \delta)]} P(S_n = u) \\ &= \sum_{u \in [nx, n(x + \delta)]} e^{-tu} E(e^{tX})^n P_t(S_{n,t} = u) \\ &\geq \sum_{u \in [nx, n(x + \delta)]} e^{-nt(x + \delta)} E(e^{tX})^n P_t(S_{n,t} = u) \\ P(S_n \in [nx, n(x + \delta)]) &\geq P_t(S_{n,t} \in [nx, n(x + \delta)]) e^{-nt(x + \delta)} E(e^{tX})^n. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité, on a simplement utilisé que $e^{-tu} \geq e^{-nt(x+\delta)}$ si $u \leq n(x+\delta)$ (et que les autres facteurs sont positifs).

On applique $\ln$ et on divise par n , pour obtenir :

$$\frac{1}{n} \ln (P(S_n \geq n(x+\delta))) \geq \frac{1}{n} \ln (P_t(S_{n,t} \in [nx, n(x+\delta)])) - (t(x+\delta) - K(t)).$$

Enfin, on a l'inclusion d'évènements $(S_n \in [nx, n(x+\delta)]) \subset (S_n \geq nx)$, d'où $P(S_n \geq nx) \geq P(S_n \in [nx, n(x+\delta)])$ et, de nouveau en appliquant $\ln$ et en divisant par n :

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) \geq \frac{1}{n} \ln P(S_n \in [nx, n(x+\delta)]).$$

11. Passage à la limite.

(a) Par la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned} E_t(X_{k,t}) &= \sum_{k=1}^r x_k P(X_{k,t} = x_k) \\ &= \sum_{k=1}^r x_k P(X = x_k) \frac{e^{-tx_k}}{E(e^{tX})} \\ E_t(X_{k,t}) &= \frac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})}, \end{aligned}$$

par une nouvelle application de la formule de transfert. Par la question 2, on a donc $E_t(X_{k,t}) = K'(t)$.

(b) Comme $x \in]E(X), x_r[$ et que $x + \delta < x_r$, on a aussi $x + \frac{\delta}{2} \in]E(X), x_r[$. Avec les notations de la question 5., on a alors $K'(t_{x+\delta/2}) = x + \delta/2$ et $t_{x+\delta/2} > 0$. De plus, un seul t peut convenir par stricte croissance de K' .

Il y a un léger conflit de notations : le $t_{x+\delta/2}$ de la question 5 est désormais noté t_δ .

(c) Comme $t_\delta = (K')^{-1}(x + \delta/2)$, $\delta \mapsto t_\delta$ est continue. Quand $\delta \rightarrow 0^+$, $x + \delta/2 \rightarrow x$ et donc $t_\delta \rightarrow (K')^{-1}(x)$. Or, avec les notations de la question 5, $(K')^{-1}(x) = t_x$. Ainsi,

$$t_\delta(x + \delta) - K(t_\delta) \rightarrow t_x x - K(t_x) = K^*(x).$$

(d) On peut réécrire cette probabilité comme $P_{t_\delta}(|S_{n,t_\delta} - n(x + \delta/2)| \leq n\delta/2)$, qui est supérieure à $1 - P_{t_\delta}(|S_{n,t_\delta} - n(x + \delta/2)| \geq n\delta/2)$ (pas égale, car on a pris des deux côtés des inégalités larges). Or, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P_{t_\delta}(|S_{n,t_\delta} - n(x + \delta/2)| \geq \delta/2) \leq \frac{4V(S_{n,t_\delta})}{n^2\delta^2} = \frac{4V(X_{1,t_\delta})}{n\delta^2},$$

car $V(S_{n,t_\delta}) = \sum_{k=1}^n V(X_{k,t_\delta}) = nV(X_{1,t_\delta})$, par indépendance des X_{k,t_δ} et car elles suivent toutes la même loi. On obtient la conclusion souhaitée.

- (e) Résumons. On a fixé $\varepsilon > 0$. On a choisi $\delta > 0$ tel que $t_\delta(x + \delta) - K(t_\delta) < K^*(x) + \varepsilon$. Par la question 10.b), on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) > \frac{1}{n} \ln (P_{t_\delta}(S_{n,t_\delta} \in [nx, n(x + \delta)])) - K^*(x) - \varepsilon.$$

La quantité dans le $\ln$ tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$. Donc, le $\ln$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (et avec le facteur $\frac{1}{n}$, la convergence vers 0 est encore plus rapide). Ainsi, pour n assez grand, on a $\frac{1}{n} \ln (P_{t_\delta}(S_{n,t_\delta} \in [nx, n(x + \delta)])) > -\varepsilon$. Et donc :

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) > -K^*(x) - 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, on dispose de la majoration

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) \leq -K^*(x),$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en déduit que $\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq nx) \rightarrow -K^*(x)$: le théorème de Cramer est démontré.