

DS 9 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Des lumières sur un échiquier

L'objectif du problème est de montrer le résultat suivant.

Il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ vérifiant :*

- $E_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{3/2}$ quand $n \rightarrow +\infty$;
- Pour toute famille $(a_{i,j}) \in \{\pm 1\}^{\llbracket 1,n \rrbracket^2}$, il existe $x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_n \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i y_j \geq E_n.$$

Interprétation du résultat.¹ n^2 ampoules allumées ou éteintes ($a_{i,j} = 1$ ou -1) sont disposées sur les cases d'un échiquier de taille $n \times n$. Ces ampoules sont contrôlées par $2n$ interrupteurs (les x_i et y_j) : l'enclenchement d'un tel interrupteur change l'état de toutes les ampoules d'une même ligne ou colonne. Le résultat dit qu'en choisissant bien les interrupteurs sur lesquels appuyer, le nombre d'ampoules allumées peut dépasser le nombre d'ampoules éteintes par une quantité de l'ordre de $n^{3/2}$.

1.1 Une asymptotique sur les marches aléatoires

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que $\frac{S_n + n}{2}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. En déduire la loi, l'espérance et la variance de S_n .

¹qui n'aide en rien à la résolution du problème

2. Montrer que $E(|S_n|) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{-n \leq k \leq n \\ k \equiv n \pmod{2}}} |k| \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$

3. On suppose que n est pair et on écrit $n = 2j$.

(a) Montrer que $E(|S_n|) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{\ell=1}^j \ell \binom{2j}{j+\ell}.$

(b) Montrer que $\sum_{\ell=1}^j \ell \binom{2j}{j+\ell} = 2j \sum_{\ell=1}^j \binom{2j-1}{j+\ell-1} - j \sum_{\ell=1}^j \binom{2j}{j+\ell}.$

(c) Montrer² que $E(|S_n|) = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2}.$

(d) En déduire que $E(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$

Par un calcul analogue, on montrerait que cet équivalent reste valable si n est impair.

1.2 Méthode probabiliste

On fixe une famille $(a_{i,j}) \in \{\pm 1\}^{\llbracket 1, n \rrbracket^2}.$

Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $R_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} Y_j$. On note enfin $R = \sum_{i=1}^n |R_i|.$

4. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, R_i a la même loi que S_n .

5. En déduire que l'espérance de R ne dépend que de n et que, en notant $E_n = E(R) :$

$$E_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{3/2}.$$

6. Montrer qu'il existe $y_1, \dots, y_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| \geq E_n.$

7. Conclure.

²Cette formule a été publiée par Abraham de Moivre en 1718.

2 Nombres eulériens

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, une ascension dans σ est un indice $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. Le nombre eulérien $\left\langle n \atop k \right\rangle$ est le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k ascensions.

Par convention, $\left\langle n \atop k \right\rangle = 0$ si $n \leq 0$ ou si $k \notin \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1. Déterminer les valeurs de $\left\langle n \atop k \right\rangle$ pour $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note τ la permutation envoyant k sur $n+1-k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (a) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Comparer le nombre d'ascensions dans σ et $\sigma \circ \tau$.
 - (b) En déduire la formule de symétrie suivante :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \left\langle n \atop k \right\rangle = \left\langle n \atop n-1-k \right\rangle.$$

3. On cherche à déterminer la valeur de $\left\langle n \atop 1 \right\rangle$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note Y le complémentaire de X dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $x_1 > x_2 > \dots > x_r$ les éléments de X et $y_1 > \dots > y_{n-r}$ ceux de Y . Montrer que la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définie par $\sigma(i) = x_i$ si $i \leq r$ et $\sigma(i) = y_{i-r}$ si $i \geq r+1$ a exactement une ascension, sauf pour $n+1$ parties X que l'on explicitera.
 - (b) Montrer réciproquement que toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ayant exactement une ascension s'obtient par la construction précédente pour une unique partie X .
 - (c) En déduire la valeur de $\left\langle n \atop 1 \right\rangle$.
4. Démontrer³ la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \left\langle n \atop k \right\rangle = (n-k) \left\langle n-1 \atop k-1 \right\rangle + (k+1) \left\langle n-1 \atop k \right\rangle.$$

³Question délicate...

3 Théorème de Cramér

Dans ce problème, on montre le théorème de Cramér⁴ qui estime la probabilité de certains évènements rares.

Soit X une variable aléatoire réelle, non presque sûrement constante. On note $x_1 < \dots < x_r$ les valeurs prises par X avec probabilité strictement positive.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $K(t) = \ln(E(e^{tX}))$.
- Pour tout $x \in]E(X), x_r[$, on note $K^*(x) = \sup \{tx - K(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Si n est un entier naturel strictement positif, on note $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Le théorème de Cramér affirme alors⁵ :

$$\forall x \in]E(X), x_r[, \frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq nx)) \rightarrow -K^*(x), \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

3.1 Étude de K et K^*

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $E(e^{tX})$ comme une somme finie, en utilisant la formule de transfert. En déduire que K est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$K'(t) = \frac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})} \text{ et } K''(t) = \frac{E(X^2e^{tX})E(e^{tX}) - E(Xe^{tX})^2}{E(e^{tX})^2}.$$

3. En déduire que K' est strictement croissante.
4. On fixe $x \in]E(X), x_r[$ et on définit f_x sur $\mathbb{R}$ par $f_x(t) = tx - K(t)$.
 - (a) Montrer que $f_x(0) = 0$, que $f'_x(0) > 0$ et que f_x tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
 - (b) En déduire que f_x admet un maximum sur $\mathbb{R}$, en un unique point de $\mathbb{R}_+$, noté t_x .

Ceci justifie la bonne définition de K^* .

5. Montrer que, pour tout $x \in]E(X), x_r[$, on a $K'(t_x) = x$. En déduire que K^* est une fonction continue.

⁴d'après Harald Cramér (1893–1985), mathématicien suédois – sans lien avec Gabriel Cramer (1704–1752) rencontré en algèbre linéaire.

⁵Pour rester dans le cadre du programme de 1ère année, l'espace probabilisé dans lequel sont définis $X_1, \dots, X_n$ dépend de n . Cependant, la probabilité $P(S_n \geq nx)$ ne dépend que de n et considérer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ a donc un sens.

3.2 Une application

Dans cette partie seulement, le théorème de Cramér est admis et X désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(1/2)$.

6. Expliciter la valeur de $K(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
7. Soit $x \in]1/2, 1[$. Avec les notations de la question 5., montrer que $t_x = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)$.
En déduire la valeur de $K^*(x)$.
8. Soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid |k - n/2| \geq \alpha n\}$ et $U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$. Exprimer en fonction de α la limite de $U_n^{1/n}$, quand $n \rightarrow +\infty$.

3.3 Démonstration du théorème

Les notations sont celles de l'introduction du problème. On fixe $x \in]E(X), x_r[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

9. **Majoration de $P(S_n \geq nx)$.**

(a) Soit $t > 0$. Justifier que $P(S_n \geq nx) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{tnx}}$ et que $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX})^n$.

(b) En déduire que $\frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq nx)) \leq -K^*(x)$.

10. **Un changement de probabilité.** Soit $t > 0$. On admet qu'on peut définir, sur un nouvel espace probabilisé fini (Ω_t, P_t) , des variables aléatoires $X_{1,t}, \dots, X_{n,t}$ indépendantes et de même loi donnée par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall u \in \mathbb{R}, P_t(X_{k,t} = u) = P(X = u) \frac{e^{tu}}{E(e^{tX})}.$$

On note $S_{n,t} = \sum_{k=1}^n X_{k,t}$ et on fixe $\delta > 0$.

(a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $P(S_n = u) = P_t(S_{n,t} = u) e^{-tu} E(e^{tX})^n$.

(b) Montrer que $P(S_n \in [nx, n(x+\delta)]) \geq P_t(S_{n,t} \in [nx, n(x+\delta)]) e^{-nt(x+\delta)} E(e^{tX})^n$.
En déduire la minoration suivante :

$$\frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq nx)) \geq \frac{1}{n} \ln(P_t(S_{n,t} \in [nx, n(x+\delta)])) - (t(x+\delta) - K(t)).$$

11. **Passage à la limite.**

(a) Montrer⁶ que, pour tout $t > 0$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_t(X_{k,t}) = K'(t)$.

⁶L'espérance de $X_{k,t}$ est (bien sûr) définie *via* la probabilité P_t .

On considère désormais uniquement des δ tel que $x + \delta < x_r$.

(b) Montrer que, pour un tel δ , il existe un unique $t_\delta > 0$ tel que $K'(t_\delta) = x + \frac{\delta}{2}$.

(c) Montrer que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (t_\delta(x + \delta) - K(t_\delta)) = K^*(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la question précédente, on peut fixer $\delta > 0$ tel que $t_\delta(x + \delta) - K(t_\delta) < K^*(x) + \varepsilon$.

(d) Montrer que $P_{t_\delta}(S_{n,t_\delta} \in [nx, n(x + \delta)])$ tend vers 1, quand $n \rightarrow +\infty$.

(e) En déduire que, pour n assez grand, on a la minoration

$$\frac{1}{n} \ln (P(S_n \geq nx)) \geq -K^*(x) - 2\varepsilon.$$

Conclure.