DM 22 - Polynômes orthogonaux

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par E_n le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive.

Partie 1 – Polynômes orthogonaux

1. Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

On appelle *système orthogonal* pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ toute famille de polynôme $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg P_k = k$ et $\langle P_k|P_l\rangle = 0$ si $k \neq l$.

2. Montrer qu'il existe un système orthogonal dans E.

3. Montrer que si $(P_k)_{k\geq 0}$ et $(Q_k)_{k\geq 0}$ sont deux systèmes orthogonaux de E, alors il existe une suite de réels $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ telle que $P_k = \lambda_k Q_k$ pour tout entier k. En déduire l'existence et l'unicité d'un système orthonormal (*i.e.* dont tous les polynômes sont unitaires).

Partie 2 – Étude des zéros

Soit désormais $(P_n)_{n\geq 0}$ un système orthogonal et k un entier naturel.

4. Justifier l'existence de deux entiers naturels p, q, de deux suites finies $(r_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(s_j)_{1\leq j\leq q}$ de réels de $]a, b[$, de deux suites finies $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(\beta_j)_{1\leq j\leq q}$ d'entiers naturels > 0 avec α_i impair et β_j pair, et de $Q \in E$ sans racine dans $]a, b[$ tels que
$$P_k = (X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_p)^{\alpha_p} (X - s_1)^{\beta_1} \cdots (X - s_q)^{\beta_q} Q.$$

5. Montrer que si $p < k$, alors $\langle P_k \,|\, (X - r_1) \cdots (X - r_p)\rangle = 0$.

6. En déduire que les racines de P_k sont réelles, simples et dans l'intervalle $]a, b[$.

On désigne désormais par $r_{k,1} < r_{k,2} < \cdots < r_{k,k}$ les racines de P_k.
On les appelle les *points de Gauss* du polynôme P_k.

7. Pourquoi cette suite ne dépend-elle que de w et pas du choix de la suite orthogonale ?

Partie 3 – Relation de récurrence

8. On rappelle que $(P_n)_n$ est un système orthogonal.
   Montrer qu'il existe trois réels $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ tels que $XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}$.

9. On suppose P_n unitaire pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ telles que pour tout entier $n \geq 2$, $P_n = (a_n + X)P_{n-1} + b_n P_{n-2}$.

Partie 4 – Une formule d'intégration

On désigne par ϕ la forme linéaire sur E définie par $P \mapsto \phi(P) = \int_a^b P(t)w(t)dt$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on désigne par ψ_r la forme linéaire $P \mapsto \psi_r(P) = P(r)$. On note ϕ_n la restriction de ϕ à E_{n-1}.

10. Soient $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de réels distincts deux à deux.
    Montrer que la famille $(\psi_{x_j})_{1\leq j\leq n}$ est une base du dual de E_{n-1}.

11. D'après la question précédente, il existe une famille $(\mu_j)_{1\leq j\leq n}$ de réels tels que $\phi_n = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}$ dans E_{n-1}^*. Montrer que pour tout $P \in E_{2n-1}$, on a encore

$$\phi(P) = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(P).$$

    On pourra utiliser une division euclidienne.

Partie 5 – Expression avec des déterminants

Pour tout entier naturel k, on pose $c_k = \langle X^k \mid 1\rangle$. On considère les déterminants :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{et}$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

où x est un nombre réel. Par convention, $\Delta_0 = c_0$ et $D_0(x) = 1$.

12. Soit A_n la matrice carrée à $n+1$ lignes dont le terme à la i^e ligne et la j^e colonne est $\langle X^{i-1} \mid X^{j-1}\rangle$.
    Montrer que A_n est inversible. En déduire $\Delta_n \neq 0$.

13. Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
    On note encore D_n le polynôme associé.

14. Montrer que $\langle D_n \mid X^k\rangle = 0$ si $k < n$. En déduire que la famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal.