

6 - Équations différentielles linéaires

Jeremy Daniel

In order to solve this differential equation you look at it till a solution occurs to you¹.

G. Polya, *How to solve it*

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

DÉFINITION 1.1 (Équation différentielle linéaire)

Une équation différentielle linéaire (EDL) sur un intervalle I est une équation de la forme

$$(E) \quad a_r(x)y^{(r)} + a_{r-1}(x)y^{(r-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

d'inconnue y une fonction r fois dérivable sur I , avec

- pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, a_k est une fonction à valeurs dans \mathbb{K} définie sur I ;
- b est une fonction à valeurs dans \mathbb{K} définie sur I .

DÉFINITION 1.2 (Ordre d'une EDL)

L'ordre de (E) est le plus grand entier k tel que a_k n'est pas la fonction identiquement nulle sur I .

REMARQUE 1.3

On suppose implicitement qu'il existe au moins une fonction a_k non identiquement nulle. L'ordre 0 étant de plus trivial, la théorie commence véritablement avec les équations d'ordre 1.

DÉFINITION 1.4 (Solution d'une EDL)

Une solution de (E) est une fonction y à valeurs dans \mathbb{K} , r fois dérivable sur I , telle que :

$$\forall x \in I, a_r(x)y^{(r)}(x) + a_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

1. L'auteur caricature volontairement l'enseignement du *traditional mathematics professor*.

REMARQUE 1.5

Même quand les a_k et b sont à valeurs réelles, on pourra considérer les solutions y à valeurs complexes de (E) . En cas d'ambiguïté, on précisera si les solutions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

DÉFINITION 1.6 (EDL homogène)

L'EDL (E) est homogène si son second membre b est identiquement nul.

DÉFINITION 1.7 (Équation homogène associée)

L'équation homogène associée à (E) est l'EDL obtenue en remplaçant le second membre b par 0. On notera

$$(E_h) \quad a_r(x)y^{(r)} + a_{r-1}(x)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

THÉORÈME 1.8 (Structure des solutions)

Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) et \mathcal{S}_h l'ensemble des solutions de (E_h) . Notons y_p une solution particulière de (E) . Alors

- \mathcal{S}_h contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}_h, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathcal{S}_h.$$

- Les solutions de \mathcal{S} sont les sommes de y_p et des solutions de \mathcal{S}_h :

$$\mathcal{S} = \{y_p + y, y \in \mathcal{S}_h\}.$$

REMARQUE 1.9

On dira plus tard que \mathcal{S}_h est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et que \mathcal{S} est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

PROPOSITION 1.10 (Principe de superposition)

Dans l'équation (E) , supposons que b s'écrive $b = \sum_{i=1}^p \lambda_i b_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et b_i est une fonction de I dans \mathbb{K} . Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons (E_i) l'EDL

$$(E_i) \quad a_r(x)y^{(r)} + a_{r-1}(x)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_i(x).$$

Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, y_i est une solution de (E_i) , alors $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i$ est une solution particulière de (E) .

REMARQUE 1.11

Ces deux résultats nous indiquent la marche à suivre pour résoudre une EDL :

- On résout l'EDL homogène associée ;

- On cherche une solution particulière, éventuellement en décomposant le second membre en une combinaison linéaire de fonctions plus simples, et en appliquant le principe de superposition.

DÉFINITION 1.12 (EDL mise sous forme normale)

Avec les notations précédentes, une EDL d'ordre r est mise sous forme normale si $a_r \equiv 1$.

REMARQUES 1.13

- Une EDL d'ordre r quelconque peut être mise sous forme normale en divisant par a_r , sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas.
- Dans le reste de ce chapitre, on ne considère que des EDL mises sous forme normale. Le cas général sera étudié plus tard.
- Les fonctions a_k et b seront toujours supposées continues.

2 Ordre 1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x),$$

où $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'équation homogène (E_h) s'écrit :

$$(E_h) \quad y' + a(x)y = 0.$$

2.1 Résolution de l'équation homogène

THÉORÈME 2.1 (Résolution de l'équation homogène)

Notons A une primitive de a sur I . L'ensemble \mathcal{S}_h des solutions de (E_h) vaut :

$$\mathcal{S}_h = \{x \mapsto C \exp(-A(x)), C \in \mathbb{K}\}.$$

REMARQUE 2.2

Une telle solution de (E_h) s'annule en un point ssi elle est identiquement nulle.

COROLLAIRE 2.3 (Cas particulier où a est constant)

Si $a \in \mathbb{K}$ est une constante, on a

$$\mathcal{S}_h = \{x \mapsto C \exp(-ax), C \in \mathbb{K}\}.$$

2.2 Recherche d'une solution particulière

THÉORÈME 2.4 (Existence d'une solution)

Sous l'hypothèse où a et b sont continues, l'équation (E) admet une solution.

REMARQUE 2.5

Avant d'entreprendre une méthode plus compliquée de recherche pratique de solution, se demander s'il n'y a pas une solution évidente. Un cas fréquent est celui où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, b(x) = \lambda a(x)$. Alors la fonction constante égale à λ est solution de (E).

2.2.1 Cas où a est constant.

MÉTHODE 2.6

On s'intéresse au cas où a est constant et où b est de la forme $b : x \mapsto P(x)e^{wx}$, où P est une fonction polynomiale et $w \in \mathbb{C}$. On cherche alors une solution particulière sous la même forme, $y : x \mapsto Q(x)e^{wx}$, où Q est une fonction polynomiale.

On trouve que y est solution de (E) ssi $Q' + (w+a)Q = P$. On peut trouver une solution Q , de même degré que P si $w + a \neq 0$ et de degré $\deg P + 1$ si $w + a = 0$.

REMARQUE 2.7

Le principe de superposition et les formules d'Euler permettent de traiter le cas plus général où $b : x \mapsto P(x) \cos(ax)e^{wx}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{C}$ (et de même, en remplaçant \cos par \sin).

REMARQUE 2.8

La solution trouvée est à valeurs complexes. La proposition suivante pourra être utile.

PROPOSITION 2.9 (Solutions complexes et réelles)

Si a est à valeurs réelles et si z est une solution de

$$(E) : z' + az = b(x),$$

alors $\operatorname{Re}(z)$ est une solution de

$$(E_{\mathbb{R}}) : y' + ay = \operatorname{Re}(b(x))$$

De même avec la partie imaginaire.

EXERCICE 2.10

Déterminer une solution particulière aux EDL suivantes :

1. $y' + y = xe^x$;
2. $y' + 2y = e^{-2x}$;
3. $y' + iy = \cos x$;
4. $y' + 3y = (\sin x)e^{2x}$.

REMARQUE 2.11

Pour cette dernière équation, il est plus rapide de dire que $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$, de trouver une solution particulière de $y' + 3y = e^{(2+i)x}$ et d'en prendre la partie imaginaire.

PROPOSITION 2.12 (Cas particulier où a et b sont constants)

Une solution particulière est donnée par $y \equiv b/a$ si $a \neq 0$ et $y : x \mapsto bx$ si $a = 0$.

2.2.2 Variation de la constante

MÉTHODE 2.13

On reprend le cas général où a et b sont des fonctions continues. Notons A une primitive de a . La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \mapsto C(x) \exp(-A(x)),$$

où $C \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est une fonction dérivable. Cela revient à faire *varier la constante* C , utilisée pour décrire l'ensemble \mathcal{S}_h .

Après calculs, on trouve que y est solution de (E) ssi C vérifie

$$\forall x \in I, C'(x) = b(x) \exp(A(x)),$$

ce qui ramène le problème à un calcul de primitive.

ATTENTION !

Une erreur courante consiste à déterminer une fonction $x \mapsto C(x)$ qui convient et à conclure que cette fonction est solution de (E) . Ne pas oublier de multiplier par $\exp(-A(x))$, pour obtenir la fonction y .

REMARQUE 2.14

Cette méthode démontre le théorème d'existence de solution à (E) .

EXERCICE 2.15

Déterminer les solutions réelles des EDL suivantes :

$$1. \quad y' + \frac{3}{x^2}y = \exp\left(\frac{3}{x}\right); \quad 2. \quad y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

2.3 Problème de Cauchy

DÉFINITION 2.16 (Problème de Cauchy, ordre 1)

Un problème de Cauchy (d'ordre 1) est la donnée d'une équation (E) et d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

THÉORÈME 2.17 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)

Soient $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

PROPOSITION 2.18 (Cas particulier où a et b sont constants)

Soient $a, b \in \mathbb{K}$, soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution à l'EDL $y' + ay = b$ telle que $y(x_0) = y_0$. Elle est donnée par

$$y : x \mapsto \frac{b}{a} + (y_0 - \frac{b}{a})e^{-a(x-x_0)} \quad \text{si } a \neq 0.$$
$$y : x \mapsto y_0 + b(x - x_0) \quad \text{si } a = 0.$$

3 Ordre 2 - coefficients constants

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soient $a, b \in \mathbb{K}$, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = f(x).$$

L'équation homogène (E_h) s'écrit

$$(E_h) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

REMARQUE 3.1

On se limite donc aux cas où les coefficients a et b sont constants. Cependant, le second membre peut varier avec x .

3.1 Résolution de l'équation homogène

DÉFINITION 3.2 (Polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique associée à l'équation homogène (E_h) est $\chi = X^2 + aX + b$.

THÉORÈME 3.3 (Solutions à valeurs complexes de l'équation homogène)

Notons $\mathcal{S}_{h, \mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_h) .

– Si χ a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 , on a

$$\mathcal{S}_{h, \mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

– Si χ a une racine double r , on a

$$\mathcal{S}_{h, \mathbb{C}} = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

COROLLAIRE 3.4 (Solutions à valeurs réelles de l'équation homogène, quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

On suppose que $a, b \in \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{S}_{h, \mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_h) .

– Si χ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , on a

$$\mathcal{S}_{h, \mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

– Si χ a une racine réelle double r , on a

$$\mathcal{S}_{h, \mathbb{R}} = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

– Si χ n'a pas de racine réelle, soit $z = u + iv$, une de ses deux racines (conjuguées complexes) écrite sous forme algébrique, où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\mathcal{S}_{h, \mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda \cos(vx)e^{ux} + \mu \sin(vx)e^{ux}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3.2 Recherche d'une solution particulière

THÉORÈME 3.5 (Existence d'une solution)

Sous l'hypothèse où f est continue, l'équation (E) admet une solution.

MÉTHODE 3.6

Comme pour l'équation d'ordre 1, on s'intéresse au cas où $f : x \mapsto P(x)e^{wx}$, où P est une fonction polynomiale et $w \in \mathbb{C}$. On cherche une solution particulière sous la même forme, $y : x \mapsto Q(x)e^{wx}$, où Q est une fonction polynomiale.

On trouve que y est solution de (E) ssi $Q'' + (2w + a)Q' + (w^2 + aw + b)Q = P$.

On peut trouver une solution Q , de degré :

- deg P ssi $w^2 + aw + b \neq 0$ ssi w n'est pas racine de χ ;
- deg $P + 1$ ssi $w^2 + aw + b = 0$ et $2w + a \neq 0$ ssi w est racine simple de χ ;
- deg $P + 2$ ssi w est racine double de χ .

REMARQUE 3.7

Ce qui a été dit dans le cas de l'ordre 1 reste valable. Les formules d'Euler et le principe de superposition permettent de traiter les cas où on a un facteur $\cos(ax)$ ou $\sin(ax)$ au lieu/en plus du facteur exponentiel.

Quand a et b sont réels et qu'on cherche une solution réelle, on pourra écrire le second membre comme la partie réelle/imaginaire d'une fonction de la forme $x \mapsto P(x)e^{wx}$, plutôt que d'utiliser les formules d'Euler.

EXERCICE 3.8

Trouver une solution particulière des EDL suivantes :

1. $y'' + y' + y = \cos x$;
2. $y'' + y' + y = e^x \cos x$;
3. $y'' - 4y' + y = (x^2 + x)e^{2x} + xe^x$.

PROPOSITION 3.9 (Cas particulier du second membre constant)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Une solution particulière à l'équation $y'' + ay' + by = c$ est donnée par

- $y : x \mapsto \frac{c}{b}$ si $b \neq 0$;
- $y : x \mapsto -\frac{c}{a}x$ si $b = 0$ et $a \neq 0$;
- $y : x \mapsto \frac{c}{2}x^2$ si $(a, b) = (0, 0)$.

3.3 Problème de Cauchy

DÉFINITION 3.10 (Problème de Cauchy, ordre 2)

Un problème de Cauchy (d'ordre 2) est la donnée d'une équation (E) et de conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$, où $x_0 \in I$ et $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$.

THÉORÈME 3.11 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)

Si $(x_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution y au problème de Cauchy.