Fonctions de deux variables

1 Fonctions de deux variables

EXERCICE 1. ●○○ *Calcul sur les gradients*

Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exprimer simplement les gradients de $\alpha f + \beta g$; $f g$; $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) et $\phi \circ f$.

EXERCICE 2. ●○○ *Dérivées partielles de la norme*

Montrer que la fonction norme $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ n'admet pas de dérivée partielle en $(0, 0)$. Montrer que sa restriction à $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

EXERCICE 3. ●○○ *Étude en $(0, 0)$*

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ sinon.

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ selon tout vecteur.
2. f est-elle continue en $(0, 0)$?

EXERCICE 4. ●○○ *Dérivées de composées*

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On note $p = \partial_1 f$ et $q = \partial_2 f$. Exprimer en fonction de p et q les dérivées par rapport à x et y de

1. $g_1(x, y) = f(x - y, x + y)$
2. $g_2(x, y) = f(y, x)$
3. $g_3(x, y) = x^2 f(2xy, xe^y)$

EXERCICE 5. ●●○ *Fonctions à gradient nul*

1. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple d'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U non constante telle que $\nabla f = 0$.

EXERCICE 6. ●●○ *Fonctions homogènes*

Une fonction g continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est homogène de degré r si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, g(tx, ty) = t^r g(x, y).$$

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r ssi, en notant $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y)$:

$$\langle \nabla f | I \rangle = r f.$$

EXERCICE 7. ●●○ *Résolution d'équations aux dérivées partielles par changement de variables*

1. Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$ par le changement de variables $(u, v) = (x + y, x - y)$.
2. Résoudre $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial y}$ par un passage en coordonnées polaires.
3. Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$ par le changement de variables $(x, y) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v^2}{u}\right)$.

EXERCICE 8. ●●○ *Fonction taux d'accroissement*

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y ; f(x, y) = g'(x) \text{ si } x = y.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$.

EXERCICE 9. ●●○ *Calcul d'extrema*

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
2. $f_2(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$
3. $f_3(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$

EXERCICE 10. ●●○ *Extrema sur un fermé*

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D .
2. Déterminer les points critiques de f en l'intérieur de D (= ensemble des points contenus dans une boule ouverte contenue dans D)
3. On admet que f admet un maximum et un minimum sur D . Les déterminer.

EXERCICE 11. ●●○ *Points critiques d'une fonction convexe*

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, \langle \nabla f(p) - \nabla f(q) \mid p - q \rangle \geq 0$.

Montrer qu'un point critique de f est un minimum.