

Équations différentielles linéaires

1 Calculs d'application

EXERCICE 1. ○○○ *Ordre 1, équation homogène*

Résoudre :

1. $y' = xy$;

2. $y' = -\frac{x}{x^2-1}y$;

3. $y' = \frac{1}{x}y$.

EXERCICE 2. ♣ – ●○○ *Ordre 1, équation générale*

Résoudre :

1. $y' - 2y = \sin(2x)$;

4. $y' + y = \arctan(e^x)$;

2. $y' + y = xe^{3x} \cos x$;

5. $y' = \frac{1}{\tan x}y + \tan^2 x$;

3. $y' = \frac{2}{x}y + \frac{x}{x-1}$;

6. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = -\frac{1}{x^2 \ln x}(\ln x + 1)$.

EXERCICE 3. ♣ – ●○○ *Ordre 2, coefficients constants, équation homogène*Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;

2. $y'' + 2y' + 4y = 0$;

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Résoudre sur $\mathbb{C}$:

4. $y'' + 9y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = i$;

5. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

EXERCICE 4. ♣ – ●○○ *Ordre 2, coefficients constants, équation générale*

Résoudre :

1. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{ch} x$;

4. $y'' - 7y' + 12y = e^{3x} \cos(3x)$;

2. $y'' + y = \cos^3 x$;

5. $y'' + 9y = \cos(3x)$;

3. $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$;

6. $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$.

EXERCICE 5. ◇ – ●○○ *Phénomène de résonance*Soit $\omega_0 > 0$. Donner suivant la valeur de $\omega > 0$ la solution de l'équation différentielle

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x)$$

telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

2 Exercices théoriques

EXERCICE 6. ♣ – ●○○ *Solutions avec deux valeurs prescrites*

Soit $L > 0$. Pour quelles valeurs de $\omega > 0$ existe-t-il une solution y non nulle à l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, telle que $y(0) = y(L) = 0$?

EXERCICE 7. ◇ – ●○○ *Une équation intégrale*

Déterminer les fonctions y continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, 2y(x) = 3x \int_0^x y(t) dt$.

EXERCICE 8. ●○○ *Un système différentiel*

Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $x(0) = 1, y(0) = 0$, et $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 6y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$.

EXERCICE 9. ◇ – ●●○ *Équations différentielles non linéaires*

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = y^2$;
2. $y' = 1 + y^2$;
3. $y' = y(y + 1)$.

EXERCICE 10. ♣/◇ – ●●○ *Presque des équations différentielles*

1. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(2 - x)$.
2. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = -2(x + 1)e^x$.
3. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = y(0) + y(1)$.

EXERCICE 11. ♣ – ●●○ *Changement de variable*

On cherche à déterminer les fonctions y définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Si y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante sur z , y est-elle solution de (E) ?
2. En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 12. ●●○ *Passage par les complexes*

On cherche les couples (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Si (x, y) est un couple de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on pose $z : t \mapsto x(t) + iy(t)$.

1. Montrer que (x, y) est solution de (E) ssi z est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, que l'on précisera.
2. Conclure.

EXERCICE 13. ♣/◇ – ●●●○ Où est l'équation différentielle ?

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{+\infty} (f + f') = 0$.

Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

EXERCICE 14. ●●●○ Changement de variable et raccordement

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$$

sur $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ne contenant pas 0.

1. Montrer que y est une solution de (E) sur I ssi $z : x \mapsto y\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de (E) sur I .
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15. ♣/◇ – ●●●○ Conditions pour solutions bornées

Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels toutes les solutions à valeurs complexes de $y'' + \alpha y + \beta = 0$ sont bornées.

EXERCICE 16. ♣/◇ – ●●●● Une inéquation différentielle

Soit f une fonction deux fois dérivable, telle que f'' est continue. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) \geq 0.$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

EXERCICE 17. ◇ – ●●●● Une solution bornée et périodique

Soit g une fonction continue 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution bornée à

$$y' - y = g$$

et que celle-ci est 2π -périodique.

Indications

Exercice 5. Il faudra distinguer le cas où $\omega = \omega_0$.

Exercice 7. Raisonner par analyse-synthèse. Si y est une solution, pourquoi est-elle dérivable ? Quelle équation différentielle vérifie-t-elle ?

Exercice 9. Pour 1., on pourra admettre que si y n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annule pas. De même pour 3., on pourra admettre que si y n'est pas constante égale à 0 ou -1 , elle ne prend jamais ces valeurs.

Exercice 10. Pour 1. et 2., dériver l'équation après avoir justifié. Pour 3., raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 13. En notant $g = f + f'$, f est solution de l'équation différentielle $y + y' = g$, donc s'exprime en fonction de g . On aura besoin de la définition rigoureuse de limite.

Exercice 15. Distinguer selon que le polynôme caractéristique a une ou deux racines.

Exercice 16. A x fixé, considérer $g(t) = f(t) \cos(x - t)$.

Exercice 17. La variation de la constante donne la forme d'une solution f . Évaluer f en les multiples de $2n\pi$ pour voir à quelle condition la suite des valeurs est bornée.