Espaces préhilbertiens

1 Calculs dans les espaces préhilbertiens

EXERCICE 1. ♣ – ●○○ *Somme, intersection, orthogonaux*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E . Montrer

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

EXERCICE 2. ●○○ *Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt*

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel.

Orthogonaliser la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) , où $u_1 = (1, 1, 0)$; $u_2 = (1, 0, 1)$; $u_3 = (1, 1, 1)$.

EXERCICE 3. ♣ – ●○○ *Projecteur orthogonal dans $\mathbb{R}^4$*

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel.

- Écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le sous-espace $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = x - z - 2t = 0\}$.
- Donner la distance à F du vecteur $(1, 2, 3, 4)$.

EXERCICE 4. ●○○ *Un calcul sur les produits scalaires*

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien E .

On suppose que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Déterminer la valeur de $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i \mid x_j \rangle$.

EXERCICE 5. ♣/◇ – ●○○ *Une inégalité dans $\mathbb{R}^n$*

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer l'inégalité $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$. Cas d'égalité ?

2 Exemples d'espaces préhilbertiens

EXERCICE 6. ●○○ *Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$*

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $\phi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})d\theta$.

- Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est une base orthonormale.

EXERCICE 7. ●○○ *Exemples de produits scalaires*

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'espace E est un espace préhilbertien.

1. $E = \mathbb{R}[X], (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$

2. $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R}), (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^1 f'(t)g'(t) dt;$

3. $E = \mathbb{R}[X], (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0);$

4. $E = \mathbb{R}_n[X], (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k),$ pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ quelconques.

EXERCICE 8. ♣ - ●○○ *Norme triple sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

On identifie l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C(n)$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|AX\| \leq C(n) \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \|X\|.$$

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. Montrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer la norme d'une matrice orthogonale.

EXERCICE 9. ♣ - ●●○ *Inégalités intégrales*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $f \in E, \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt$. Cas d'égalité ?

2. Montrer qu'il n'existe pas de réel A tel que pour tout $f \in E, \int_0^1 f^2(t) dt \leq A \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2$.

3. Montrer que $\int_0^1 \int_0^1 (f(u) - f(v))^2 du dv = 2 \int_0^1 f(t)^2 dt - 2 \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2$.

4. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$.

EXERCICE 10. ●●○ *Produit scalaire sur les matrices*

On note $\|M\|$ la norme de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associée au produit scalaire $(M, N) \mapsto \text{Tr}(M^T N)$.

1. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer l'orthogonal des matrices scalaires ; des matrices symétriques.

3. Soient A, B deux matrices symétriques. Montrer que $\sqrt{\text{Tr}(A+B)^2} \leq \sqrt{\text{Tr}(A^2)} + \sqrt{\text{Tr}(B^2)}$.

EXERCICE 11. ♣ – ●●○ *Polynômes de Legendre*

On considère sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire donné par $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n = (X^n(1-X)^n)^{(n)}$.

1. Montrer que L_n est de degré n et calculer son coefficient dominant.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle P' | Q \rangle = -\langle P | Q' \rangle$.
3. Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
4. Déterminer $\|L_n\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 12. ●●○ *Produit scalaire sur les polynômes*

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.

1. A quelle condition sur les a_i ceci définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

On suppose cette condition vérifiée.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance de X^n à $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{i=0}^n P(a_i) = 0\}$.

EXERCICE 13. ●●○ *L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$*

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n^2$ converge.

1. Montrer que si (a_n) et (b_n) sont dans $\ell^2(\mathbb{R})$, alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. On définit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par : pour toutes $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suites de $\ell^2(\mathbb{R})$, $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.
4. La famille des $(\mathbf{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où $\mathbf{e}_k$ est la suite $(\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle orthonormée ?
Est-ce une base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{R})$?

EXERCICE 14. ◇ – ●●○ *Contre-exemples en dimension infinie*

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

1. Soit $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$ et conclure que $(H^\perp)^\perp \neq H$.
2. Soient $A = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$ et $B = \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\}$.
Démontrer que $A^\perp = B$, que $B^\perp = A$, mais que $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp + B^\perp$.

EXERCICE 15. ●●○ *Un produit scalaire sur les fonctions continues*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $(a_n)_n$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f | g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(a_k)g(a_k)$. Justifier la définition et montrer que ceci définit un produit scalaire ssi $(a_n)_n$ est dense dans $[0, 1]$.

EXERCICE 16. ♣ – ●●○ *Inégalité de Hilbert*

1. Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{-1}^1 P^2 = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta$.

2. En déduire que, pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{a_k a_\ell}{k + \ell + 1} \leq \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$.

3 Distance à un sous-espace

EXERCICE 17. ◇ – ●○○ *Un calcul de distance*

Déterminer $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

EXERCICE 18. ♣ – ●●○ *Un calcul de distance sur les matrices*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

à l'ensemble des matrices antisymétriques.

EXERCICE 19. ♣ – ●●○ *Polynômes de Tchebychev*

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\langle P | Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t) dt$.

1. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Rappeler la définition et la relation de récurrence vérifiées par les polynômes de Tchebychev T_n . Donner le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\|T_n\|$.
4. On note F_n le sous-espace affine des polynômes unitaires de degré n : $F_n = X^n + \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $\inf_{P \in F_n} \int_0^\pi P(\cos t)^2 dt$ est atteint en $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ et calculer sa valeur.
5. On note F l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\inf_{P \in F} \int_0^1 P(\cos t)^2 dt$.

EXERCICE 20. ♣ – ●●○ *Déterminants de Gram*

Soit E un espace préhilbertien. Si $x_1, \dots, x_n \in E$, on appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

et déterminant de Gram de $x_1, \dots, x_n$ le déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$ de cette matrice.

1. Montrer que $\text{rg Gram}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
En déduire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ssi $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
2. On suppose E euclidien orienté de dimension $n \geq 1$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]^2$.
3. Dans le cas général, on note F un sous-espace vectoriel de E de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F . Montrer que, pour tout $x \in E$, $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

EXERCICE 21. ●●○ *Minimisation de l'énergie*

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
2. On pose $F = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$. Montrer que $F^\perp = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.
3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathcal{C}^1([0, 1])$ sur F .
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $E_{\alpha, \beta} = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$.
Montrer l'égalité $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \text{ch } 1 - 2\alpha\beta}{\text{sh } 1}$.

4 Endomorphismes remarquables

EXERCICE 22. ♣/◇ – ●●○ *Inégalités sur les matrices orthogonales*

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.

EXERCICE 23. ♣ – ●●○ *Symétrie orthogonale et réflexions*

Soit E un espace euclidien de dimension n , soit s une symétrie orthogonale de E , par rapport à un sous-espace F de dimension d . Montrer que s est la composée de $n - d$ réflexions.

EXERCICE 24. ●●○ *Caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soit E un espace euclidien, soit p une projection de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que p est orthogonale ssi pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

EXERCICE 25. ●●○ *Adjoint d'un endomorphisme*

Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f^* : E \rightarrow E$ telle que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle.$$

2. Montrer que f^* est linéaire.
3. Montrer que l'application de $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $f \mapsto f^*$ est linéaire.
Montrer que Φ est une symétrie ; Φ est-elle un automorphisme d'algèbre ?
4. Exprimer la matrice de f^* en fonction de celle de f dans une base orthonormée.

EXERCICE 26. ●●○ *Endomorphismes commutant à $O(E)$*

Soit E un espace euclidien.

Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E commutant à tout élément de $O(E)$.

EXERCICE 27. ●●○ *Les isométries sont affines*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer qu'il existe $A \in O(\mathbb{R}^n)$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f : X \mapsto AX + Y$.

EXERCICE 28. ●●○ *Conservation de l'orthogonalité*

Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x, y \in E, \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle u(x) | u(y) \rangle = 0.$$

Que dire de u ?

EXERCICE 29. ♣/◇ – ●●○ *Décomposition QR et inégalité de Hadamard*

1. **Décomposition QR.** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ tels que $M = QR$.
2. **Inégalité de Hadamard.** Montrer $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), |\det M| \leq \|C_1(M)\| \cdots \|C_n(M)\|$, en notant $C_k(M)$ la k -ème colonne de M .

5 Autres exercices

EXERCICE 30. ●●○ *Le retour de la diagonale nulle*

Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Tr}(f) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $\langle f(x) | x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f a une diagonale nulle.

EXERCICE 31. ♣ – ●●○ *Simplexe régulier*

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Montrer qu'on peut trouver $x_1, \dots, x_{n+1}$ unitaires dans E tels que $\forall i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle = -\frac{1}{n}$.

EXERCICE 32. ♣ – ●●○ *Méthode probabiliste d'Erdős*

Soient $v_1, \dots, v_n$ unitaires dans un préhilbertien E . On veut montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\| \leq \sqrt{n}$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi

de Rademacher. On pose $X = \|\sum_{i=1}^n X_i v_i\|$. Déterminer l'espérance de X et conclure.

EXERCICE 33. ●●○ *Théorème de von Neumann*

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On suppose que

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer que la norme est euclidienne.

EXERCICE 34. ♣ – ●●○ *Un (cas particulier d'un) théorème de Grothendieck*

Soit $V \subset \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel et $A > 0$ tels que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq A \|f\|_2$.

1. Montrer que V est strictement inclus dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée de V .

(a) Pour tous $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$, majorer $\left\| \sum_{i=1}^p c_i f_i \right\|_\infty$ en fonction de $\sum_{i=1}^p c_i^2$.

(b) En déduire que $\sum_{i=1}^p f_i^2 \leq A^2$.

3. Déduire de la question précédente que V est de dimension finie et que $\dim V \leq A^2$.
4. Montrer que pour tout n , il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{C}\mathcal{M}([0, 1], \mathbb{R})$ de dimension n et tel que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq \sqrt{n} \|f\|_2$.

EXERCICE 35. ♣ – ●●○ *Familles obtusangles*

Soit E un espace euclidien de dimension n . Soient $x_1, \dots, x_k$ dans E .

On suppose que pour tous $i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle < 0$. Montrer que $k \leq n + 1$.

Indications

Exercice 5. Cauchy-Schwarz astucieux.

Exercice 14. Définir des fonctions nulles en 0, mais valant 1 en dehors d'un petit voisinage de 0.

Exercice 17. Interpréter cet infimum en fonction de la distance de $t \mapsto t^3$ à l'espace des fonctions polynomiales de degré ≤ 2 .

Exercice 22. Cauchy-Schwarz astucieux.

Exercice 29. Interpréter 1. comme une traduction matricielle du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.