# Familles sommables

## 1 Sommabilité

**EXERCICE 1.** ♣ – ●◐○ *Étude de sommabilité*
Les familles suivantes sont-elle sommables ($\alpha > 0$) ?

1. $\left(\dfrac{2^n + 3^m}{(n+m)!}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\dfrac{1}{n^2 - m^2}\right)_{\substack{n,m\in\mathbb{N}^*\\ n\neq m}}$
3. $\left(\dfrac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2\setminus\{(0,0)\}}$
4. $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}$

**EXERCICE 2.** ●◐○ *Familles des* $\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$
Donne une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable.

## 2 Calculs de sommes

**EXERCICE 3.** ●◐○ *Une somme double*
Soit $p \geq 3$ un entier. Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$.

**EXERCICE 4.** ●●○ *Une expression de* $\zeta(3)$
Montrer que $\displaystyle\sum_{n,m\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{H_n}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{H_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3)$.

**EXERCICE 5.** ●●◐ *Une somme avec l'indicatrice d'Euler*
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\phi(n)}{2^{n-1}}$.

## 3 Autres exercices

**EXERCICE 6.** ●●◐ *Théorème de réarrangement de Riemann*
Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

**EXERCICE 7.** ●●◐ *Séries d'Eisenstein*
On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

1. Soit $k$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $A_z \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{1}{|az+b|^k} \leq \frac{A_z}{\max\left(|a|,|b|\right)^k}.$$

2. Soit $k \geq 3$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(nz+m)^k}\right)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable.

3. Soit $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(nz+m)^k}$. Calculer $G_k$ quand $k$ est impair.

4. On suppose $k$ pair. Montrer que $\lim_{y\to+\infty} G_k(iy) = 2\zeta(k)$.