DM 24 - Polynômes orthogonaux

Partie 1 – Polynômes orthogonaux

1. On vérifie rapidement la bilinéarité, la symétrie (*à faire sur une copie*). Le caractère positif vient de ce que, w étant positif, $\int_a^b P^2(t)w(t)dt \geq 0$ si $P \in E$. Le caractère défini positif vient de la propriété de stricte positivité de l'intégrale : si $P \in E$ est tel que $\int_a^b P^2(t)w(t)dt = 0$, alors $P^2(t)w(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Comme $w > 0$ sur $[a,b]$, P est identiquement nul sur $[a,b]$. Ayant une infinité de racines, P est donc nul.

2. On part de la base canonique de E et on l'orthogonalise par le processus de Gram-Schmidt (qu'on étend sans peine au cas d'une famille libre indexée par $\mathbb{N}$). La famille (P_k) ainsi construite vérifie $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_k) = \mathrm{Vect}(X^0,\dots,X^k) = E_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; en particulier $\deg P_k = k$).

3. *Je me rends compte un peu tard qu'il faudrait parler de système orthogonal unitaire, et non de système orthonormal...*
Soit $k \in \mathbb{N}$. Les Q_i, pour $0 \leq i \leq k$ forment une base de E_k (car Q_i de degré i) et $P_k \in E_k$. On peut donc trouver des constantes $\lambda_{0,k},\dots,\lambda_{k,k}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{k} Q_i$. Par hypothèse, P_k est orthogonal à tous les P_i, pour $0 \leq i \leq k-1$, donc à l'espace vectoriel E_{k-1} dont ils forment une base. Comme les Q_i, pour $1 \leq i \leq k-1$ sont dans E_{k-1}, P_k est orthogonal à ces Q_i. On peut ainsi prendre le produit scalaire avec un Q_j ($j \in [\![0,k-1]\!]$) et utiliser aussi l'orthogonalité des Q_i :
$$0 = \langle P_k \mid Q_j\rangle = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k}\langle Q_i \mid Q_j\rangle = \lambda_{i,j}\|Q_j\|^2.$$
Donc, $P_k = \lambda_{k,k}Q_k$, ce qui conclut.
Pour l'existence d'un système orthogonal unitaire, on part d'un système orthogonal quelconque (Q_k) et divise chaque Q_k par son coefficient dominant. L'unicité vient du calcul précédent : si (P_k) et (Q_k) sont des systèmes orthogonaux unitaires, il existe des λ_k tels que $P_k = \lambda_k Q_k$. Nécessairement, $\lambda_k = 1$ puisque P_k et Q_k sont tous deux unitaires.

Partie 2 – Étude des zéros

4. On note r_i les racines réelles de P_k dans $]a,b[$ de multiplicités α_i impaires, s_j celles de multiplicités β_j paires (avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$). Par définition, $\prod_{i=1}^{p}(X-r_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{\beta_j}$ divise P. Le quotient Q n'a par construction aucune racine dans $]a,b[$.

5. Le polynôme $(X-r_1)\dots(X-r_p)$ est dans E_p ; il est donc orthogonal à P_k si $p < k$ (car on a dit plus haut que P_k est orthogonal à tous les P_i, avec $i \leq k-1$ et que ceux-ci forment une base de E_{k-1}).

6. Supposons par l'absurde que $p < k$. Le produit scalaire de la question précédente vaut :

$$\langle P_k \mid (X-r_1)\dots(X-r_p)\rangle = \int_a^b (t-r_1)^{\alpha_1+1}\dots(t-r_p)^{\alpha_p+1}(t-s_1)^{\beta_1}\dots(t-s_q)^{\beta_q}Q(t)dt.$$

C'est l'intégrale d'une fonction positive, non identiquement nulle (elle ne s'annule qu'en les r_i et s_j. Elle ne peut donc pas être nulle : ceci contredit la question précédente.
Donc, $p = k$, ce qui revient à dire que P_k a k racines réelles dans $]a, b[$ de multiplicité impaire ; nécessairement ces multiplicités valent 1.

7. On a vu précédemment que les deux polynômes de degré k d'une suite orthogonale ne différaient que par une constante multiplicative : les racines de ce polynôme ne dépendent donc que de w.

Partie 3 – Relation de récurrence

8. Soit $n \geq 1$, soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a

$$\langle XP_n \mid P_k\rangle = \int_a^b tP_n(t)P_k(t)w(t)dt = \int_a^b P_n(t)tP_k(t)w(t)dt = \langle P_n \mid XP_k\rangle = 0,$$

l'annulation du produit scalaire venant de ce que $XP_k \in E_{n-1}$.
Comme $XP_n \in E_{n+1}$, il est combinaison linéaire des P_i pour $i \in [\![0, n+1]\!]$. Avec l'annulation des produits scalaires qu'on vient de montrer, on a $XP_n = \alpha_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma P_{n+1}$, pour des réels α_n, β_n et γ_n.

9. Si les P_n sont unitaires, l'identification des coefficients dominants dans la relation précédente donne $\gamma_n = 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$:

$$P_{n+1} = (X-\beta_n)P_n - \alpha_n P_{n-1}.$$

Donc, pour tout $n \geq 2$:

$$P_n = (X-\beta_{n-1})P_{n-1} - \alpha_{n-1}P_{n-2}.$$

En posant $a_n = -\beta_{n-1}$ et $b_n = \alpha_{n-1}$, on a la relation demandée.

Partie 4 – Une formule d'intégration

10. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum j = 1^n \lambda_j \psi_j = 0$. On note L_j le polynôme valant 0 en les x_i avec $i \neq j$ et 1 en x_j (ainsi, $L_j = \dfrac{\prod_{i\neq j}(X-x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}$). Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_j(L_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_k(x_j) = \lambda_k.$$

Ceci montre que la famille des ψ_j est libre. Comme elle est de cardinal n et que E_{n-1} est de dimension n (donc son dual aussi), la famille des ψ_j est une base du dual de E_{n-1}.
On a vu plusieurs fois qu'il s'agit là de la base duale de la base donnée par les polynômes d'interpolation d'interpolation de Lagrange, pour les réels $x_1, \dots, x_n$.

11. Soit $P \in E_{2n-1}$. On réalise la division euclidienne de P par P_n : $P = QP_n + R$, avec $\deg R \leq n-1$. On a donc :

$$\phi(P) = \phi(QP_n) + \phi(R).$$

Or, par définition de ϕ, $\phi(QP_n) = \langle Q \mid P_n \rangle = 0$ car $Q \in E_{n-1}$. Donc,

$$\phi(P) = \phi(R) = \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(P).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(QP_n) = 0$. Mais ceci vient immédiatement du fait que les $r_{n,j}$ sont les racines de P_n de sorte que $\psi_{r_{n,j}}(QP_n) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On a donc bien, pour tout $P \in E_{2n-1}$:

$$\phi(P) = \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j \psi_{r_n,j}(P).$$

Partie 5 – Expression avec des déterminants

Pour tout entier naturel k, on pose $c_k = \langle X^k \mid 1 \rangle$. On considère les déterminants :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{et}$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

où x est un nombre réel. Par convention, $\Delta_0 = c_0$ et $D_0(x) = 1$.

12. Il s'agit de la matrice de Gram de la famille $(X^0, \ldots, X^n)$ dans E_n. Comme cette famille est une base de E_n, la matrice de Gram est inversible (*notion hors-programme ; on renvoie à la correction de l'exercice faite en TD*).
Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\langle X^{i-1} \mid X^{j-1} \rangle = \langle X^{i+j-2} \mid 1 \rangle$, en utilisant la définition intégrale du produit scalaire. Ceci vaut c_{i+j-2}, de sorte que Δ_n est le déterminant de A_n ; donc $\Delta_n \neq 0$.

13. Un développement de $D_n(x)$ sur la dernière ligne montre immédiatement que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction polynomiale. De plus le coefficient devant x^n est Δ_{n-1}, dont on vient de montrer qu'il était non nul. C'est donc une fonction polynomiale de degré n.

14. On a $D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \Delta_{n,i} X^i$, en développant selon la dernière ligne, et no notant $\Delta_{n,i}$ le mineur obtenu en enlevant la dernière ligne et la $(i+1)$-ème colonne de la matrice. Soit $k < n$. On a donc :

$$\langle D_n \mid X^k \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \Delta_{n,i} \langle X^i \mid X^k \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \Delta_{n,i} c_{i+k}.$$

C'est aussi le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} & c_{k+n} \end{pmatrix}$$

par un développement *à l'envers* sur la dernière ligne. Comme la dernière ligne apparait parmi les n premières, ce déterminant est nul. Donc, $\langle D_n \mid X_k \rangle = 0$.
Il doit y avoir une façon plus conceptuelle de voir les choses...

Par linéarité, on en déduit immédiatement que si $k < n$, D_n et D_k sont orthogonaux, ce qui conclut.