

Thm: $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^{\pm}$,

$$(i) \sum_{i \in I} |a_i| < +\infty \quad ((a_i) \text{ sommable})$$

$\Updownarrow$

(ii) Il existe $s \in \mathbb{C}$ tq

$\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset I$ finie tq

$\forall J \subset I$ finie contenant F ,

$$\left| \sum_{i \in J} a_i - s \right| < \varepsilon.$$

De plus, dans ce cas,

$$s = \sum_{i \in I} a_i$$

(la somme étant définie en séparant parties réelle/im. positive/négative).

Dém: $(i) \Rightarrow (ii)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On considère $F \subset I$ finie tq

$$\sum_{i \in F} |a_i| \geq \sum_{i \in I} |a_i| - \varepsilon.$$

Si $J \subset I$ finie contient F , on a donc :

$$\sum_{i \in J} |a_i| \geq \sum_{i \in F} |a_i| \geq \sum_{i \in I} |a_i| - \varepsilon$$

Donc, $\sum_{i \in I \setminus I_0} |a_i| \in [0; \varepsilon]$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } & \left| \sum_{i \in I_0} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| \\ &= \left| \sum_{i \in I \setminus I_0} a_i \right| \stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{i \in I \setminus I_0} |a_i| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc (ii), avec $S = \sum_{i \in I} a_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On raisonne par contraposition.
On sup. $\sum_{i \in I} |a_i| = +\infty$.

Pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, on note
 $I_k = \{i \in I \mid \text{Arg } a_i \in [\frac{2k\pi}{6}; \frac{2(k+1)\pi}{6}]\}$

où $\text{Arg } z$ est l'argument de z dans $[0; 2\pi[$. (p.ex. 0 si $z = 0$).

$$\text{On a } I = \bigcup_{k=0}^5 I_k,$$

$$\exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket : \sum_{i \in I_k} |a_i| = +\infty.$$

Considérons $i_1, \dots, i_m$ dans I_k .

Pour chaque i_j , on écrit

$$a_{i_j} = |a_{i_j}| e^{i\theta_j}, \text{ avec } \theta_j \in \left[\frac{2k\pi}{6}, \frac{2(k+1)\pi}{6} \right]$$

$$\text{Alors, } \left| \sum_{j=1}^m a_{i_j} \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^m |a_{i_j}| e^{i(\theta_j - \frac{(2k+1)\pi}{6})} \right|$$

$$\leq \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m |a_{i_j}| e^{i(\theta_j - \frac{(2k+1)\pi}{6})} \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^m |a_{i_j}| \cos \left(\theta_j - \frac{(2k+1)\pi}{6} \right)$$

Comme $\theta_j - \frac{(2k+1)\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$, les cos sont $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Donc, } \left| \sum_{j=1}^m a_{i_j} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=1}^m |a_{i_j}|.$$

Si (ii) était vrai, on aurait pour $\varepsilon = 1$ et pour $\mathbb{I} \cap \mathbb{J}$:

$\mathbb{I} \cap \mathbb{J}$ finie tq si $\mathbb{J}$ finie contient $\mathbb{F}$,

$$\left| \sum_{i \in S} a_i \right| \leq s+1.$$

$$\text{et donc } \left| \sum_{i \in S \cup F} a_i \right| \leq s+1 + \left| \sum_{i \in F} a_i \right|.$$

Comme F est finie,

$$\sum_{i \in \mathbb{I}_k \setminus F} |a_i| = +\infty.$$

On peut donc trouver $\tilde{J}$ finie dans $\mathbb{I}_k \setminus F$ t.q. $\sum_{i \in \tilde{J}} |a_i| > \frac{2}{\sqrt{3}} (s+1 + \left| \sum_{i \in F} a_i \right|)$

Avec les inégalités précédentes,

$$\left| \sum_{i \in \tilde{J}} a_i \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i \in \tilde{J}} |a_i|$$

$$> s+1 + \left| \sum_{i \in F} a_i \right|,$$

ce qui est absurde.

$$\text{Donc } \tilde{u}) \Rightarrow i)$$

Rq: on aurait pu découper en 3 ou 4 plutôt qu'en 6.