

## DM 1 - Modes de raisonnement

**Exercice 1.** – *Théorème de Zeckendorf*

On définit la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ .  
Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Zeckendorf :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique entier  $N \in \mathbb{N}^*$  et des entiers uniques  $k_1, \dots, k_N \geq 2$  tels que :

- $\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, k_{i+1} \geq k_i + 2$  ;
- $n = F_{k_N} + F_{k_{N-1}} + \dots + F_{k_1}$ .

On appellera *décomposition de Zeckendorf* de  $n$  cette écriture.

1. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17 et de 52.
2. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un entier  $k \geq 2$  tel que  $F_k \leq n < F_{k+1}$ .
3. Démontrer que tout entier  $n$  non nul admet une décomposition de Zeckendorf.
4. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$F_{2n} - 1 = F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} \text{ et } F_{2n+1} - 1 = F_2 + F_4 + \dots + F_{2n}.$$

5. En déduire, pour tout  $n \geq 1$ , l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de  $n$ .

**Exercice 2.** – *Vrai/Faux*

On justifiera les réponses.

1. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $fg$  est une fonction croissante.
2. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes, dont l'un au moins n'est pas réel. On suppose que  $z_1 + z_2$  et  $z_1 z_2$  sont réels. Alors,  $z_1$  et  $z_2$  sont conjugués.
3. Si  $n$  est un entier naturel impair, alors  $n^2 - 1$  est divisible par 8.
4. Si  $x$  est un nombre réel tel que  $x^2 \geq 9$ , alors  $x \geq 3$ .

**Exercice 3.** – *Une équation fonctionnelle*

Déterminer les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ .

**Exercice 4.** – *Démonstration d'assertions*

Pour chacune des assertions suivantes, expliciter *concrètement* sa signification, puis déterminer avec une démonstration si elle est vraie ou fausse.

1.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } ay^2 + by + c = 0$ .
2.  $\forall s, p \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = s \text{ et } xy = p$ .
3.  $\forall A > 0, \exists a, b > 0 : ab = A \text{ et } (\forall c, d > 0, cd = A \implies a + b \leq c + d)$ .