

## Logique et raisonnements

### 1 Logiques, quantificateurs

#### EXERCICE 1. $\diamond - \circ\circ\circ$ Calcul propositionnel

Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  des assertions. Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

1.  $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  ;
2.  $Q \implies (P \implies Q)$  ;
3.  $(P \implies Q) \implies ((P \wedge R) \implies (Q \wedge R))$ .

#### EXERCICE 2. $\diamond - \bullet\circ\circ$ Quantificateurs et connecteurs

Soit  $E$  un ensemble, soient  $P(x)$  et  $Q(x)$  des prédicats en la variable  $x \in E$ . Déterminer si les assertions suivantes sont vraies. Justifier.

1.  $\forall x \in E, (P(x) \wedge Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$  ;
2.  $\exists x \in E, (P(x) \wedge Q(x)) \iff (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$  ;
3.  $\forall x \in E, (P(x) \vee Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$  ;
4.  $\exists x \in E, (P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$ .

#### EXERCICE 3. $\bullet\circ\circ$ Traduction formelle

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. Traduire formellement les assertions suivantes :

- |                                                               |                                                           |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante ;      | 4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle ;        |
| 2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule au moins une fois ;    | 5. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée ;     |
| 3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois ; | 6. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. |

#### EXERCICE 4. $\bullet\circ\circ$ Négation d'assertions

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Déterminer la signification des assertions suivantes, puis les nier :

- |                                                             |                                                                 |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$ ;                         | 3. $\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$ ; |
| 2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I : f(x) = y$ ; | 4. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, f(x) \leq M$ .  |

#### EXERCICE 5. $\bullet\bullet\circ$ Fonction nulle part monotone

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que  $f$  n'est monotone sur aucun segment  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

**EXERCICE 6. ●●○ Polynômes et entiers**

Soit  $P = aX^2 + bX + c$  un polynôme, avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Écrire une implication affirmant que si  $P$  est à coefficients entiers, alors sa valeur prise en un entier quelconque est un entier.

La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

**EXERCICE 7. ♣/◇ – ●●○ Uniforme continuité**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

On dit que  $f$  est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une fonction uniformément continue est continue.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

**2 Modes de raisonnement****EXERCICE 8. ◇ – ●○○ Un réel vraiment petit**

Soit  $x$  un réel positif. On suppose que :  $\forall \epsilon > 0, x < \epsilon$ .

Montrer que  $x = 0$ .

**EXERCICE 9. ♣ – ●●○ Racines d'entiers**

1. Soit  $p$  un nombre premier, soit  $n \geq 2$  un entier. Montrer que  $\sqrt[n]{p}$  est un nombre irrationnel.
2. Soit  $n \geq 2$  un entier, qui n'est pas un carré parfait. Montrer que  $\sqrt{n}$  est irrationnel.

**EXERCICE 10. ♣/◇ – ●●○ Puissance d'irrationnels**

On considère le réel  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ .

1. Que vaut  $x^{\sqrt{2}}$  ?
2. En déduire qu'on peut trouver deux nombres irrationnels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha^\beta$  est rationnel.

**EXERCICE 11. ♣ – ●●○ Une équation fonctionnelle**

On cherche à déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y).$$

On procède par analyse synthèse.

1. Soit  $f$  une fonction solution.
  - (a) Déterminer  $f(0)$ .
  - (b) En déduire que  $\forall y \in \mathbb{R}, f(y)^2 = y^2$ .
  - (c) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ .
2. Conclure.

**EXERCICE 12.**  $\diamond - \bullet \circ \circ$  *Somme de fonctions paire et impaire*

Montrer que toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**EXERCICE 13.**  $\bullet \bullet \circ$  *D'autres décompositions*

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. Montrer que  $f$  s'écrit  $f = g + c$ , où  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue est telle que  $\int_0^1 g(t) dt = 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  s'écrit  $f = g + h$ , où  $h : x \mapsto \alpha x + \beta$  est une fonction affine et où  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue est telle que,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^1 (at + b)g(t) dt = 0$ .
3. Montrer que les deux décompositions précédentes sont uniques et préciser les valeurs des fonctions et constantes intervenant dans ces décompositions.

### 3 Récurrences

**EXERCICE 14.**  $\circ \circ \circ$  *Inégalité de Bernoulli*

Soit  $x \geq 0$  un réel. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1 + nx$ .

**EXERCICE 15.**  $\bullet \bullet \circ$  *Suite de Fibonacci*

On définit la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 1}$  par récurrence :

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que  $\forall n \geq 2, \forall m \geq 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .
2. Montrer que  $\forall n \geq 2, F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$  :

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 \text{ et } F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$

**EXERCICE 16.**  $\diamond - \bullet \bullet \circ$  *Un drôle de raisonnement par récurrence*

Soit  $\mathcal{P}(n)$  un prédicat portant sur un entier  $n \geq 2$  un entier. On suppose :

- $\mathcal{P}(2)$  ;
- $\forall n \geq 3, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$ .
- $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(2) \implies \mathcal{P}(2n)$  ;

Montrer que  $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n)$ .

**EXERCICE 17.**  $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$  *Inégalité arithmético-géométrique*

En utilisant le mode de raisonnement par récurrence décrit dans l'exercice précédent, montrer que :  $\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \geq 0, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ .

**EXERCICE 18.**  $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \bullet$  *Théorème de Rédei sur les tournois*

Soit  $n \geq 2$  un entier. Un tournoi oppose  $n$  équipes : chaque équipe affronte une fois chaque autre équipe et leur match désigne un vainqueur (pas de match nul).

Montrer qu'on peut numéroter les équipes  $E_1, \dots, E_n$  de telle sorte que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , l'équipe  $E_i$  a battu l'équipe  $E_{i+1}$ .

## 4 Ensembles

### EXERCICE 19. ○○○ Notations ensemblistes

Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . Les assertions suivantes sont-elles correctes ?

1.  $1 \in E$  ;
2.  $1 \in \mathcal{P}(E)$  ;
3.  $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$  ;
4.  $(1, 2) \in E$  ;
5.  $(1, 2) \subset E$  ;
6.  $\emptyset \in E$ .

### EXERCICE 20. ◇ – ○○○ Inclusion de produits cartésiens

Soient  $A, B, C$  trois ensembles. On suppose que  $A \times B \subset B \times C$ . Montrer que  $A \subset C$ .

### EXERCICE 21. ◇ – ●○○ Raisonnements ensemblistes

Soit  $\Omega$  un ensemble, soient  $A, B$  et  $C$  des parties de  $\Omega$ . Montrer les assertions suivantes :

1.  $A \cap B = A \cup B \iff A = B$  ;
2.  $(A \cup B \subset A \cup C) \wedge (A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$ .

### EXERCICE 22. ♣/◇ – ●○○ Égalité d'ensembles

On considère  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$  et  $B = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$  deux parties de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $A = B$ .

### EXERCICE 23. ♣ – ●●○○ Union et intersection infinies

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $b - a > 2$ . Déterminer  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$  et  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$ .

### EXERCICE 24. ●●○○ Différence symétrique

Soit  $\Omega$  un ensemble. Si  $A, B \subset \Omega$ , on appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  – et on note  $A \Delta B$  – l'ensemble  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ .

1. Montrer que  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ .
2. Si  $A, B$  et  $C$  sont trois ensembles, identifier simplement l'ensemble  $A \Delta (B \Delta C)$ .
3. En déduire que  $\Delta$  est associative :  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega), A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ .
4. Montrer que  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega), A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$ .

### EXERCICE 25. ♣/◇ – ●●○○ Des équations ensemblistes

Soient  $\Omega$  un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $\Omega$ . Résoudre les équations

1.  $A \cap X = B$  ;
2.  $A \cup X = B$  ;
3.  $A \cap X = B \cap X$ ,

où pour chaque équation, l'inconnue est  $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

## Indications

**Exercice 1.** Utiliser des tables de vérité.

**Exercice 2.** Pour montrer qu'une assertion est fausse, on donne un contre-exemple.

**Exercice 7.** Pour 2., considérer par exemple  $x \mapsto x^2$

**Exercice 8.** Par contraposée.

**Exercice 10.** Pour 2., on ne demande pas d'exhiber  $\alpha$  et  $\beta$

**Exercice 12.** Par analyse-synthèse. Bien écrite, l'analyse montre l'unicité.

**Exercice 16.** On peut raisonner par une récurrence forte classique ou bien – ce qui revient au même – raisonner par l'absurde en considérant le plus petit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est faux.

**Exercice 17.** Pour  $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$ , on pourra poser  $x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ .

**Exercice 18.** Pour la récurrence, on peut se représenter  $n$  équipes ainsi numérotées sur une droite. Il s'agit alors de décider où placer la nouvelle équipe pour respecter la contrainte.

**Exercice 20.** Traduire l'hypothèse d'inclusion.

**Exercice 21.** Pour 2., considérer un  $b \in B$  et distinguer selon qu'il appartient ou pas à  $A$ .

**Exercice 22.** Le premier ensemble est présenté par équations ; le deuxième par paramétrage. L'inclusion  $B \subset A$  devrait être immédiate. Pour  $A \subset B$ , il faut trouver quel  $t$  convient.

**Exercice 25.** Des dessins sont vivement recommandés. On raisonnera par analyse-synthèse : quelles conditions doit vérifier  $X$  pour satisfaire ces équations ? Puis, on montrera qu'elles sont suffisantes.