1 - Calculs algébriques

Jeremy Daniel

'And you do Addition ?' the White Queen asked. 'What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one ?'
'I don't know,' said Alice. 'I lost count.'
'She can't do Addition,' the Red Queen interrupted.

Lewis Caroll, *Through the Looking-Glass*

1 Sommes

1.1 Définition du symbole Σ

Définition 1.1 (Symbole Σ)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres (réels ou complexes). On note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Remarque 1.2
On pourrait proposer une définition plus formelle en définissant la notation par récurrence. Pour $n = 0$, on convient que la somme vaut 0.

Définition 1.3 (Somme sur un ensemble fini quelconque)
Soit I un ensemble fini d'indices, de cardinal n. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres, indexée par I. En écrivant $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, on définit $\sum_{i\in I} a_i$ comme $\sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$.

Remarque 1.4
La somme est indépendante du choix de la numérotation des éléments de I.

Remarque 1.5
Dans le cas particulier où $I = \emptyset$, la somme vaut 0.

Exemple 1.6
Si $I = \{\text{pomme}, \text{poire}, \text{abricot}\}$, on peut désigner par a_i – pour $i \in I$ – le nombre de fruits i achetés au marché. Le nombre total de fruits achetés est alors $\sum\limits_{i \in I} a_i$.

On remarque qu'il n'y a pas d'ordre de sommation naturel mais qu'il est nécessaire de choisir un tel ordre pour calculer effectivement la somme.

Exemples 1.7

- Soient $p, q \in \mathbb{Z}$, tels que $p \leq q$. Si $(a_i)_{i \in [\![p,q]\!]}$ est une famille de nombres,

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i \in [\![p,q]\!]} a_i = \sum_{k=1}^{q-p+1} a_{p-1+k} = a_p + \cdots + a_q.$$

  Ici, $n = q - p + 1$ et on a choisi d'indexer *dans l'ordre* les éléments de $[\![p, q]\!]$.
- Notons $I = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ l'ensemble des entiers pairs compris entre 1 et 10. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres, on a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^{5} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}.$$

  Ici, $n = 5$ et on a de nouveau numéroté les éléments de I dans l'ordre.
- Soit $n \geq 2$ un entier. Notons $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines complexes du polynôme $X^n - 1$. En notant $\omega = e^{2ik\pi/n}$, on a $\mathbb{U}_n = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n\}$. Alors,

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=1}^{n} \omega^k.$$

  On montre que cette somme vaut 0. Ici, l'élément d'indice $z \in \mathbb{U}_n$ est z lui-même.

Remarque 1.8
Parfois, on n'explicite pas l'ensemble d'indices dans une somme. Dans ce cas, on écrit sous le symbole Σ des conditions pour retenir les indices que l'on souhaite. Ainsi,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{10} a_k = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}.$$

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{12} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}.$$

1.2 Manipulations de sommes

Proposition 1.9
Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres, indexées par un ensemble fini I, soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *Distributivité :* $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$
- *Séparation de sommes de même indice :* $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$

Remarque 1.10
On a donc plus généralement $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$.
On parle de *linéarité* du symbole $\sum$.

Définition 1.11 (Changement de variable)
On appelle changement de variable dans une somme toute manipulation consistant à réécrire/réordonner l'ensemble des indices.

Exemples 1.12
Soit $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres.

- Décalage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$
- Retournement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}$
- Doublement pour les pairs : $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2\rfloor} a_{2i}$
- Doublement pour les impairs : $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor} a_{2i-1}$

Proposition 1.13 (Découpage d'une somme)
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres indexés par un ensemble fini I. Soit $I_1 \subset I$; notons $I_2 = I - I_1$ son complémentaire. Alors, $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$.

Remarque 1.14
On peut généraliser : si J est un ensemble fini, si on dispose de parties $I_j \subset I$ pour tout $j \in J$ et si les I_j forment une partition de I (les I_j sont deux à deux disjoints et leur union vaut I), alors $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)$. On parle de *sommation par paquets*.

Exemples 1.15
Soit $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres.

- Découpage en sous-intervalles ($p \in [\![1,n]\!]$) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$.
- Découpage pair/impair : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{n} a_k$.

Proposition 1.16 (Sommes usuelles)
Soient $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C}$. On a les égalités suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 1.17
Calcul de la somme des entiers pairs/impairs.

Proposition 1.18 (Somme téléscopique)
Une somme de la forme $S = \displaystyle\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} - a_k)$ vaut $a_{q+1} - u_p$.

Proposition 1.19 (Égalité de Bernoulli)
Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Remarque 1.20
C'est une généralisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Exemple 1.21
Calcul de la somme des entiers, de la somme des carrés d'entiers, en utilisant une somme téléscopique.

Exercice 1.22
Retrouver $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ par récurrence. Montrer aussi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

1.3 Sommes doubles

Définition 1.23 (Somme double rectangulaire)
On appelle somme double (rectangulaire) une somme de la forme

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j},$$

où $(a_{i,j})_{I\times J}$ est une famille de nombres indexés par un produit $I \times J$ d'ensembles finis.

Exemple 1.24
Dans le cas le plus courant, $I = [\![1, n]\!]$, $J = [\![1, p]\!]$. On note encore la somme

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j},$$

qu'on peut voir comme la somme de coefficients contenus dans la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 1.25 (Découpage d'une somme double)
Soit $S = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ *une somme double. On a*

$$S = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{i,j}\Big).$$

Dans le cas particulier où $I = J = [\![1, n]\!]$*, on peut aussi considérer des sommes sur les diagonales* $j - i =$ *constante :*

$$S = \sum_{k=-n+1}^{n-1}\Big(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ j-i=k}} a_{i,j}\Big).$$

Exercice 1.26
Simplifier la somme double $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$.

Définition 1.27 (Somme triangulaire)
On appelle somme triangulaire une somme du type $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$.

Remarque 1.28
C'est la somme des coefficients d'une matrice carrée triangulaire :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition 1.29 (Découpage d'une somme triangulaire)
Soit $S = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ *une somme triangulaire. On a*

- *Découpage sur les lignes :* $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \Big)$
- *Découpage sur les colonnes :* $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \Big)$
- *Découpage sur les diagonales :* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j-i=k} a_{i,j} \Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i+k} \Big)$.

Remarque 1.30
Quand on a des sommes de sommes, l'indice de la somme interne peut être contraint par celui de la somme externe. Mais le contraire n'aurait pas de sens !

Exercice 1.31
En remarquant que $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 1$, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k 2^k$.

Exercice 1.32
Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$.

Proposition 1.33 (Découpage carré/triangles)
Soit $S = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ *une somme double (carrée). On a*

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}.$$

Si de plus pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$, *on a*

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}.$$

2 Produits, factorielles, coefficients binomiaux

2.1 Produits

Définition 2.1
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres. On note $\prod_{i\in I} a_i$ leur produit.

Remarque 2.2
Par convention, un produit indexé par un ensemble vide est égal à 1.

Proposition 2.3 (Règles de calcul)
Soit I un ensemble fini de cardinal n. Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ des familles de nombres, soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$;
- $\prod_{i\in I} a_i b_i = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$.

Remarque 2.4
Les règles de découpage et de changement de variable vues pour les sommes s'adaptent aux produits.

Exercice 2.5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $J_1, \dots, J_n$ des ensembles finis. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in J_i$, on se donne un nombre $a_{i,j}$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j\in J_i} a_{i,j}\Big) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n} \Big(\prod_{i=1}^{n} a_{i,j_i}\Big).$$

Proposition 2.6 (Transformation somme/produit)
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes. On a : $\exp\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) = \prod_{i\in I} \exp(a_i)$.
Si les a_i sont des réels strictement positifs : $\ln\Big(\prod_{i\in I} a_i\Big) = \sum_{i\in I} \ln a_i$.

Exemple 2.7
Un exemple de produit téléscopique. Simplifier $P = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k})$.

2.2 Factorielles et coefficients binomiaux

Définition 2.8 (Factorielle)

Soit n un entier naturel. La *factorielle* de n, notée $n!$ est le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque 2.9
En particulier, $0! = 1$.

Proposition 2.10 (Relation fondamentale)
Pour tout entier naturel n, on a $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Exercice 2.11
Exprimer, avec l'aide de factorielles, le produit des n premiers entiers pairs (0 exclu), puis le produit des n premiers entiers impairs.

Définition 2.12 (Coefficients binomiaux)
Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On définit

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 2.13
On convient que $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.

Proposition 2.14 (Formules principales)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. On dispose des formules suivantes :
- *Symétrie :* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- *Relation de Pascal :* $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
- *Formule du chef :* $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Définition 2.15 (Triangle de Pascal)
On appelle *triangle de Pascal* le tableau des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$. On le présente généralement en prenant n pour la ligne et k pour la colonne ; il commence

$$
\text{donc ainsi :} \quad \begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

Remarque 2.16
La formule de symétrie se lit sur chaque ligne. De plus, chaque coefficient se calcule rapidement en faisant la somme des coefficients supérieur et supérieur gauche. Il est bon de connaître par cœur ces coefficients jusqu'à $n = 4$.

Théorème 2.17 (Formule du binôme de Newton)
Soient n un entier naturel, a et b des nombres complexes. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3 Suites usuelles

3.1 Suites arithmético-géométriques

Définition 3.1 (Suite arithmétique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $a \in \mathbb{C}$ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$.

Proposition 3.2
On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + na$.

Définition 3.3 (Suite géométrique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

Proposition 3.4
On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.

Définition 3.5 (Suite arithmético-géométrique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode 3.6
Étant donnée une suite arithmético-géométrique, on peut trouver une expression pour le terme général u_n.

- On cherche une suite particulière vérifiant la relation de récurrence. En pratique, pour $a \neq 1$ (seul cas pertinent), on peut trouver une suite constante égale à x, où x est tel que $x = ax + b$.
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - x$. Alors (u_n) vérifie la relation de récurrence souhaitée ssi $\forall \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n$ ssi (v_n) est géométrique de raison a.
- On en déduit la forme de (v_n) puis celle de (u_n), en adaptant la constante à la valeur initiale u_0.

Exercice 3.7
Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$.

3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 3.8 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$(\star) \ \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Définition 3.9 (Polynôme caractéristique)
Le polynôme caractéristique d'une telle suite récurrente est $\chi = X^2 - aX - b$.

Remarque 3.10
Les signes *moins* viennent de ce que l'équation de récurrence peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0.$$

Remarque 3.11
On montrera rapidement que tout polynôme de degré 2 à coefficients complexes admet deux racines complexes ou une seule racine, dite *double*.

Théorème 3.12 (Structure des solutions - cas complexe)
On note χ le polynôme caractéristique.
- *S'il a deux racines distinctes r_1 et r_2, les suites vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

  où λ et μ sont deux complexes.
- *S'il a une racine double r, les suites vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r^n,$$

  où λ et μ sont deux complexes.

Remarque 3.13
Pour trouver la valeur de λ et μ, on utilise les valeurs de u_0 et u_1.

Remarque 3.14
Quand a et b sont réels, on est plutôt intéressé par les suites à valeurs réelles vérifiant la relation de récurrence.

Théorème 3.15 (Structure des solutions - cas réel)
On suppose que a et b sont réels et on note χ le polynôme caractéristique.
- *Si P a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les suites réelles vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$
où λ et μ sont deux réels.
- *Si P a une racine double r, les suites réelles vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r^n,$$
où λ et μ sont deux réels.
- *Si P n'a pas de racine réelle, on note $z = re^{i\theta}$ une de ses racines complexes (conjuguées), écrite sous forme trigonométrique. Les suites réelles vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)\rho^n,$$
où λ et μ sont deux réels.

Remarque 3.16
Dans le dernier cas, on remarque que le choix de l'une ou l'autre racine complexe modifie le couple (λ, μ) en $(\lambda, -\mu)$. Cependant, l'ensemble des solutions est inchangé.

4 Système linéaire 2×2

Définition 4.1
Un système linéaire à deux équations et deux inconnues est un système d'équation de la forme $\left\{ \begin{array}{l} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_2 + dy_2 = y_2 \end{array} \right.$, où $a, b, c, d, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sont les inconnues.

Proposition 4.2
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Le système précédent a une unique solution (x_1, x_2), pour tout second membre (y_1, y_2) ssi $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, la solution est donnée par $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{dy_1 - by_2}{ad-bc} \\ x_2 = \frac{-cy_1 + ay_2}{ad-bc} \end{array} \right.$

Remarque 4.3
Matriciellement, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
Le système s'écrit alors $AX = Y$ et l'unique solution X s'écrit $X = A^{-1}Y$, où
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4
Résoudre : $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right.$

5 Décomposition en éléments simples

Méthode 5.1
On se donne n nombres deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$. On cherche à simplifier l'expression $\frac{p(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$, où p est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$ et x est différent des x_i.

- Il existe des constantes $a_1, \ldots, a_n$ telles que $\forall x \neq x_i$, $\frac{p(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x-x_i}$.
- On obtient la valeur de a_i en multipliant formellement l'expression de départ par $x - x_i$, puis en évaluant en x_i : $a_i = p(x_i) \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{1}{x_i - x_k}$.

Exercice 5.2
Simplifier $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$, où x est un réel distinct de 0, 1 et 2.