DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Théorème de Zeckendorf*

cf. autre document.

Exercice 2. – *Vrai/Faux*

On justifiera les réponses.

1. Si f et g sont deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors fg est une fonction croissante.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, dont l'un au moins n'est pas réel. On suppose que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont réels. Alors, z_1 et z_2 sont conjugués.
3. Si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
4. Si x est un nombre réel tel que $x^2 \geq 9$, alors $x \geq 3$.

Solution 2

1. C'est faux. Considérer pour f et g la même fonction $x \mapsto x$, qui est croissante. Alors, fg : $x \mapsto x^2$ qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
2. C'est vrai. Les nombres complexes z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$, qui est par hypothèse à coefficients réels. Or, on sait que si un polynôme de degré 2 à coefficients réels a une racine non réelle, alors ses deux racines sont des conjugués complexes.
3. C'est vrai. Soit n un entier naturel impair. On peut écrire $n = 2k+1$, où k est un entier naturel. Alors, $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Le nombre $k(k+1)$ est pair car produit de deux entiers consécutifs ; il s'écrit donc 2ℓ avec ℓ un entier et $n^2 - 1 = 8\ell$ est bien divisible par 8.
4. C'est faux. Le nombre $x = -4$ vérifie $x^2 \geq 9$, mais pas $x \geq 3$.

Exercice 3. – *Une équation fonctionnelle*

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

Solution 3

On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une telle fonction. En prenant $x = y = 0$, on a $f(0)^2 - f(0) = 0$ et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. De plus, $x = 0$ et $y = 1$ donnent $f(0)f(1) - f(0) = 1$, excluant que $f(0) = 0$. Donc, $f(0) = 1$. On prend ensuite x quelconque et $y = 0$ et on a $f(x) - f(0) = x$, donc $f(x) = x + 1$. Ainsi, au plus une fonction convient.

Synthèse. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x+1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$, donc f convient.

Conclusion. Il y a exactement une fonction solution : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x+1$.

Exercice 4. – *Démonstration d'assertions*

cf. autre document.