

DM 2 - Inversion de Pascal et formule de Faulhaber

Exercice 1. – Formule d'inversion de Pascal

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres.

On définit sa *transformée binomiale* comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e_k$.

1. Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers naturels. Calculer, selon les valeurs de k et de n , la quantité

$$\mu(k, n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k}.$$

2. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa transformée binomiale. Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p.$$

Exercice 2. – Nombre de dérangements

Soit E un ensemble. Une *permutation* de E est une fonction $f : E \rightarrow E$ tel que tout élément de E admet un unique antécédent par f : $\forall y \in E, \exists ! x \in E : f(x) = y$.

Une permutation de E est un *dérangement* si elle est sans point fixe : $\forall x \in E, f(x) \neq x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On convient que $D_0 = 1$.

1. On admet que $\forall n \geq 1, D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que

$$\forall n \geq 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

2. On note $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la transformée binomiale de $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Calculer les valeurs de D_n et T_n pour $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
3. Conjecturer une formule pour T_n , puis la démontrer.
4. En déduire une formule pour D_n .
5. (Bonus) Si les n passagers d'un avion s'assoient au hasard sur les n sièges, quelle est la probabilité qu'aucun ne soit à la place indiquée sur son billet ? Pour $n = 500$, on réalisera en Python¹ une simulation de l'expérience et on comparera au résultat théorique.

¹On pourra utiliser la méthode `shuffle` du module `random`.

Exercice 3. – Formule de Faulhaber

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli est l'unique suite vérifiant $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

On ne demande pas de vérifier que cette suite est bien définie.

Le but de l'exercice est d'obtenir une expression polynomiale en n de $S_p(n)$, en utilisant les nombres de Bernoulli.

1. Calculer b_n , pour $n \leq 4$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.

Pour tous entiers naturels n et p , on définit $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

3. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $S_{p+1}(n+1) = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n)$.

4. En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - p! \sum_{j=0}^{p-1} \frac{S_j(n)}{j!(p+1-j)!}.$$

Pour tous entiers naturels n et p , on définit $T_p(n) = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$.

5. Montrer que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{\ell=0}^p \sum_{j=0}^{\ell} b_{p-\ell} n^j \binom{p+1}{p-\ell} \binom{\ell+1}{j} = (p+1)n^p$.

Pour la deuxième égalité, on pourra réécrire le produit des coefficients binomiaux en un autre produit de coefficients binomiaux, dont un seul dépend de ℓ .

6. En déduire la *formule de Faulhaber* : $\forall n, p \in \mathbb{N}, S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n)$.

7. Que vaut $\sum_{k=1}^n k^4$, si $n \in \mathbb{N}$?