

Nombres réels

Jeremy Daniel

You don't have to be a mathematician
to have a feel for numbers.

John F. Nash

1 Calcul sur les réels

1.1 Inégalités

PROPOSITION 1.1 (Inégalités et somme)

Soient x, y, z, t des nombres réels.

- Si $x \leq z$ et $y \leq t$, alors $x + y \leq z + t$;
- Si $x \leq z$ et $y \geq t$, alors $x - y \leq z - t$.

REMARQUE 1.2

Par récurrence, on en déduit que si I est un ensemble fini et si, pour tout $i \in I$, on dispose de réels x_i et y_i tels que $x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

PROPOSITION 1.3 (Inégalités et produit)

Soient x, y, z, t des nombres réels positifs.

- Si $x \leq z$ et $y \leq t$, alors $xy \leq zt$;
- Si $x \leq z$ et $y \geq t > 0$, alors $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{t}$.

REMARQUE 1.4

Comme précédemment, si on dispose de réels positifs $x_i \leq y_i$, alors $\prod_{i \in I} x_i \leq \prod_{i \in I} y_i$.

PROPOSITION 1.5 (Inégalité arithmético-géométrique)

On dispose des inégalités suivantes entre nombres réels :

- Si $x, y \geq 0$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ avec égalité ssi $x = y$;

- Si $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ avec égalité ssi $x = y$;
- Si $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ avec égalité ssi $x = 1$.

THÉORÈME 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de nombres réels. On a l'inégalité :

$$\sum_{i \in I} a_i b_i \leq \left(\sum_{i \in I} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in I} b_i^2 \right)^{1/2},$$

avec égalité ssi

- ou bien tous les a_i sont nuls.
- ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+ : \forall i \in I, b_i = \lambda a_i$.

REMARQUE 1.7

Deux familles vérifiant la condition du cas d'égalité sont dites *positivement liées*.

1.2 Valeur absolue

DÉFINITION 1.8 (Valeur absolue)

Soit x un réel. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

PROPOSITION 1.9 (Autre définition)

Pour tout réel x , $|x| = \sqrt{x^2}$.

THÉORÈME 1.10 (Inégalité triangulaire)

Soient x, y des nombres réels.

On a $|x + y| \leq |x| + |y|$, avec égalité ssi x et y ont le même signe.

THÉORÈME 1.11 (Inégalité triangulaire inversée)

Soient x, y des nombres réels. On a $|x + y| \geq \left| |x| - |y| \right|$.

REMARQUE 1.12

En pratique, on sait le plus souvent qui de x et de y est le plus grand *en valeur absolue*. Si $|x| \geq |y|$, on a ainsi : $|x + y| \geq |x| - |y|$.

En toutes lettres : la valeur absolue d'une somme de deux nombres est supérieure ou égale à la différence des valeurs absolue des deux nombres.

PROPOSITION 1.13 (Valeur absolue et maximum/minimum)

Soient x, y des nombres réels.

- $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$;

$$- \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

1.3 Partie entière

DÉFINITION 1.14 (Partie entière)

Soit x un réel. La partie entière de x , notée ¹ $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$.

PROPOSITION 1.15 (Caractérisation)

$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

DÉFINITION 1.16 (Partie entière supérieure, partie fractionnaire - HP)

Soit x un réel.

- La partie entière supérieure de x , notée $\lceil x \rceil$, est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 < x \leq n$.
- La partie fractionnaire de x , notée $\{x\}$, est définie par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

PROPOSITION 1.17

Soit x un réel, soit n un entier.

$$\begin{array}{ll} - \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n & - \lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ - \{x + n\} = \{x\} & - \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \end{array}$$

EXEMPLES 1.18

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lceil \pi \rceil = 4$; $\{\pi\} = 0,1415926535\dots$
- $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$; $\{2\} = 0$
- $\lfloor -1,4 \rfloor = -2$; $\lceil -1,4 \rceil = -1$; $\{-1,4\} = 0,6$

2 Propriétés des réels

2.1 Parties denses de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 2.1 (Partie dense de $\mathbb{R}$)

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \implies (A \cap]x, y[\neq \emptyset)$.

REMARQUE 2.2

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dira que A est dense dans I si

$$\forall x, y \in I, (x < y) \implies (A \cap]x, y[\neq \emptyset).$$

THÉORÈME 2.3 ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont des parties denses)

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont tous deux denses dans $\mathbb{R}$.

1. On ne confondra pas cette notation avec celle de la valeur absolue !

2.2 Propriété de la borne supérieure

DÉFINITION 2.4 (Majorant)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est *un* majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$.

On dit que A est une partie majorée si elle admet un majorant.

DÉFINITION 2.5 (Maximum)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est *le* maximum de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A .

EXEMPLE 2.6

Les intervalles $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont tous deux majorés par 1 ; 1 est le maximum de $[0, 1]$ tandis que $[0, 1[$ n'a pas de maximum.

DÉFINITION 2.7 (Borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est *la* borne supérieure de A si

- M est un majorant de A .
- Il n'existe pas de majorant de A strictement inférieur à M .

PROPOSITION 2.8 (Caractérisation de la borne supérieure)

Avec les notations précédentes, M est la borne supérieure de A ssi

- $\forall x \in A, x \leq M$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x \geq M - \varepsilon$.

THÉORÈME 2.9 (Propriété de la borne supérieure)

Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

REMARQUE 2.10

En prenant les inégalités opposées, on définit de même les notions de minorant, minimum et borne inférieure. Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

2.3 Parties convexes et intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 2.11 (Partie convexe de $\mathbb{R}$)

Une partie A de $\mathbb{R}$ est convexe si $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in A$.

REMARQUE 2.12

Comme l'ensemble $\{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$ est simplement le segment $[x, y]$ (ou $[y, x]$ si $y < x$), cela revient à demander : $\forall x, y \in A, (x < y) \implies [x, y] \subset A$.

THÉORÈME 2.13 (Les parties convexes sont les intervalles)

Une partie A de $\mathbb{R}$ est convexe ssi c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.