Calculs algébriques

1 Sommes et produits

EXERCICE 1. ○○○ *Sommes et produits élémentaires*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{2k+3}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ak}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} a$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$;
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a^k$;
6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}$.

EXERCICE 2. ♢ – ○○○ *Téléscopages*
Soit $n \geq 2$ un entier. Simplifier :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+3}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

EXERCICE 3. ●◐○ *Autres téléscopages*

1. Calculer, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est strictement décroissante.

EXERCICE 4. ♣ – ●◐○ *Sommes doubles*
Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$;
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}$;
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$;
4. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$;
5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ |i-j|=1}} ij$;
6. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i+j=n}} ij$.

EXERCICE 5. ♢ – ●○○ *Un produit*
Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1+a^{2^k}\right)$.

EXERCICE 6. ♢ – ●○○ *Terme général d'une suite*
Déterminer les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = n$.

EXERCICE 7. ●◐○ *Série harmonique*
Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq 1/2$.

2. En déduire une minoration de H_{2^n}.

3. En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge.

EXERCICE 8. ♣ – ●◐○ *Décomposition en somme de factorielles*
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in [\![0, (p+1)! - 1]\!]$, il existe un unique $(n_0, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que

$$\forall k \in [\![0, p]\!], 0 \leq n_k \leq k \text{ et } n = \sum_{k=0}^{p} n_k k!.$$

EXERCICE 9. ♣/♢ – ●◐○ *Une inégalité de Tchebychev*
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels. On note

$$S = \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j),\ s_1 = \sum_{1\leq k\leq n} a_k,\ s_2 = \sum_{1\leq k\leq n} b_k,\ s_3 = \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k.$$

1. Exprimer S en fonction de s_1, s_2 et s_3.

2. En déduire que si $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_n$, alors $\left(\sum_{1\leq k\leq n} a_k\right)\left(\sum_{1\leq k\leq n} b_k\right) \leq n \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k$.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●●○ *Formule d'al-Haytham*
Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. En simplifiant de deux façons différentes la somme $\sum_{0\leq i<j\leq n} i^p$, montrer la formule d'al-Haytham : $nS_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}$.

2. En déduire une formule pour $S_n^{(4)}$.

2 Coefficients binomiaux

EXERCICE 11. ♢ – ●○○ *Un coefficient binomial sur deux*
Soit $n \geq 1$ un entier. On note $P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

Calculer P_n et I_n.

EXERCICE 12. ♢ – ●○○ *Somme des coefficients binomiaux sur une colonne*

Soient $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq p$. Montrer que $\displaystyle\sum_{m=0}^{p} \binom{m}{k} = \binom{p+1}{k+1}$.

EXERCICE 13. ♢ – ●○○ *Somme des* $k\binom{n}{k}$

Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

EXERCICE 14. ●◐○ *Encore des identités avec les coefficients binomiaux !*

1. Soient $m, r, k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$. Que donne le cas particulier $k = 1$?
2. Soient $r, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq m$.

   En utilisant les deux questions précédentes, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$.

EXERCICE 15. ♣/♢ – ●●◐ *Formule du multinôme*

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + \cdots + k_m = n$. Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ est défini par $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des réels. Montrer la formule du multinôme :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1, k_2, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}.$$

3 Suites arithmético-géométriques

EXERCICE 16. ○○○ *Suites arithmético-géométriques*

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$.
2. Déterminer toutes les suites (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(v_n + 1)$.

EXERCICE 17. ♢ – ●○○ *Suite homographique*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Déterminer l'expression du terme général de (v_n).

3. En déduire la limite de (v_n), puis la limite de (u_n).

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

EXERCICE 18. ◐○○ *Suites récurrentes linéaires d'ordre* 2

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$.

2. Déterminer le terme général de la suite (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2(i+1)v_{n+1} - 2i v_n$.

3. Déterminer toutes les suites (w_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n = 0$.

Indications

Exercice 2. Pour le 4., déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$, pour tout k.

Exercice 5. Considérer $(1-a)P_n$.

Exercice 6. Quand on connait les accroissements d'une suite, on connait la suite.

Exercice 9. Pour simplifier les calculs, exprimer S comme une somme carrée plutôt que triangulaire.

Exercice 10. Pour le calcul final de $S_n^{(4)}$, on pourra utiliser un logiciel de calcul formel.

Exercice 11. Considérer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. Pour calculer $P_n - I_n$, rassembler les deux sommes.

Exercice 12. On peut faire apparaître un téléscopage.

Exercice 13. Utiliser la formule du chef.

Exercice 15. Par récurrence sur m.

Exercice 17. Déterminer une relation de récurrence sur (v_n).