

DM 3 – Théorème de Beatty – Points rationnels du plan

1 Théorème de Beatty

On dit de deux parties A et B d'un ensemble E qu'elles forment une partition de E si A et B sont non vides, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. Si $\alpha > 1$ est un réel, on note $B_\alpha = \{\lfloor n\alpha \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $f_\alpha(m)$ le nombre d'entiers $p \in B_\alpha$ tels que $p \leq m$.

On cherche à démontrer le théorème de Beatty :

Soient $\alpha, \beta > 1$. Les ensembles B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si, et seulement si, α et β sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

1. Soient $\alpha > 1$ un réel, $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_\alpha(m)$ vérifie :

$$\frac{m+1}{\alpha} - 1 \leq f_\alpha(m) < \frac{m+1}{\alpha}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\frac{f_\alpha(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel que l'on précisera.

Soient $\alpha, \beta > 1$ tels que B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

4. Montrer que $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, puis que α et β le sont.

On suppose maintenant que $\alpha, \beta > 1$ sont deux irrationnels tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (et on ne fait plus d'hypothèses sur B_α et B_β).

5. Montrer que B_α et B_β sont disjoints.

6. Montrer que pour tout $m \geq 1$, $f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m$, puis conclure.

2 Points rationnels du plan complexe

On identifie le plan usuel à l'ensemble des nombres complexes. Un nombre complexe est dit *rationnel* si ses parties réelle et imaginaire sont des nombres rationnels. On note $\mathbb{Q}[i]$ l'ensemble de ces nombres. Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

2.1 Points rationnels sur le cercle trigonométrique

On cherche à identifier l'ensemble $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$, c'est-à-dire l'ensemble des points rationnels sur le cercle trigonométrique.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on note $z_u = \frac{1-u^2}{1+u^2} + i \frac{2u}{1+u^2}$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, z_u \in \mathbb{U}$.
2. Réciproquement, montrer que si $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$, alors il existe un unique $u \in \mathbb{R}$ tel que $z = z_u$.
3. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, u est égal au coefficient directeur de la droite passant par -1 et z_u . En déduire une représentation graphique de l'association $u \mapsto z_u$.
4. Soit $u \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $z_u \in \mathbb{Q}[i]$. Conclure.

On appelle *triplet pythagoricien* un triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

5. Montrer qu'un triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est pythagoricien ssi il existe deux entiers p, q tels que $0 < q < p$, $\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ et $\frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$.

2.2 Polygones réguliers à sommets rationnels

1. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n , à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.

On pourra définir la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence double.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Z}$. On note P la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$.
Montrer que si $q \in \mathbb{Q}$ est tel que $P(q) = 0$, alors $q \in \mathbb{Z}$. On admettra que si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a est premier avec b^k .

3. Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(2 \cos(r\pi)) - 2 = 0$.

4. En déduire que $\cos(r\pi) \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

5. Que vaut l'ensemble $\left\{ \theta \in [0, 2\pi[\mid \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q} \text{ et } \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \right\}$?

6. On considère un polygone régulier à $n \geq 3$ côtés. On note $a_0, \dots, a_{n-1}$ ses sommets – écrits dans l'ordre et dans le sens trigonométrique – et ω son centre.

On suppose que $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}[i]$.

- (a) Donner sans démonstration, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'expression de a_k en fonction de a_0 , ω et n .
- (b) Montrer que $\omega \in \mathbb{Q}[i]$.
- (c) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$.
- (d) En déduire la valeur de n .