DM 2 - Inversion de Pascal et formule de Faulhaber

Remarques générales. Il faut une certaine expérience pour devenir à l'aise sur ce genre de calculs. Il y a de nombreuses façons de faire ses calculs, plus ou moins directes. Pour progresser, il est important de ne pas se contenter d'obtenir les égalités annoncées ; il faut faire en sorte que la façon de les obtenir soit le plus naturel possible, pour adapter ces calculs à d'autres situations.
Bien étudier le corrigé si besoin.

Exercice 1. – *Formule d'inversion de Pascal*

1. Il est plus agréable de commencer par écrire un calcul préliminaire avec le produit des coefficients binomiaux. Ne pas oublier le cas particulier $n = k$!

2. Si le calcul est bien mené, il ne devrait pas y avoir besoin de refaire la transformation avec les coefficients binomiaux (ce qui revient à refaire la question 1).

Exercice 2. – *Nombre de dérangements*

1. Une récurrence simple suffit.

2. RAS

3. La stratégie consiste à exprimer T_{n+1} en fonction de T_n. Puisqu'on nous a fait montrer une relation de récurrence simple sur la suite (D_n), on a intérêt à utiliser celle-ci (plutôt que la relation de récurrence double de l'énoncé). Avec un peu d'expérience, on doit pouvoir faire ce genre de calculs de façon *presque* automatique.

4. RAS

5. Le seul intérêt de la question est dans la simulation Python. Ne pas négliger l'aspect expérimental dans les mathématiques.

Exercice 3. – *Formule de Faulhaber*

1. RAS

2. Petites manipulations à partir de la définition. Il y a un décalage entre le n de la définition des nombres de Bernoulli et celui de la question, qu'il était bon de souligner.

3. Quand on doit montrer une égalité, on part le plus souvent du membre le plus compliqué (ici celui de droite) pour aller vers le plus simple ; quand une expression fait intervenir une somme double, la stratégie de base consiste à inverser l'ordre de sommation.

4. Cette question ne nécessite pas de récurrence. Il fallait plutôt découper la somme de la question précédente en retirant les deux derniers termes. C'est essentiellement la stratégie employée pour la formule d'al-Haytham, obtenue en TD.

5. La première égalité est assez immédiate. Pour la deuxième, il faut d'une part penser à réécrire le produit des coefficients binomiaux autrement (l'indication est donnée et cela a aussi été fait dans l'exercice 1) et d'autre part, comprendre la valeur des sommes de termes s'exprimant comme produit de coefficients binomiaux et de nombres de Bernoulli. Il faut ici être très précis ; on *sait* qu'on va utiliser la définition des nombres de Bernoulli mais la difficulté est de bien faire attention aux indices.

6. Pas de récurrence ici ! La question précédente exprime l'accroissement de la suite $\left(T_p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$; pour obtenir le terme général $T_p(n)$, on utilise une somme téléscopique !

7. Pour l'application numérique, on a intérêt à écrire la somme recherchée comme $S_4(n) + n^4$, plutôt que comme $S_4(n+1)$ (pour éviter d'avoir à développer des puissances de $n+1$).