

## Nombres complexes et trigonométrie

### 1 Calculs sur les nombres complexes

**EXERCICE 1.**  $\diamond - \bullet \circ \circ$  *Un nombre réel*

Soient  $z$  et  $z'$  des nombres complexes de module 1 tels que  $zz' \neq -1$ . Montrer que  $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$ .

**EXERCICE 2.**  $\bullet \circ \circ$  *Forme trigonométrique*

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Mettre sous forme trigonométrique :

1.  $\left(-1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^6$  ;

3.  $z = 1 + \sin \theta - i \cos \theta$  ;

2.  $\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(1 + i)^3}$  ;

4.  $w = 1 - i \tan \theta$

**EXERCICE 3.**  $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$  *Forme trigonométrique - 2*

Mettre  $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  sous forme trigonométrique.

**EXERCICE 4.**  $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$  *Un coefficient binomial sur trois*

Soit  $n \geq 1$ . Calculer les sommes suivantes :  $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \equiv 0[3]}} \binom{n}{k}$ ,  $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \equiv 1[3]}} \binom{n}{k}$ ,  $C_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \equiv 2[3]}} \binom{n}{k}$ .

**EXERCICE 5.**  $\diamond - \bullet \bullet \circ$  *Manipulation de l'inégalité triangulaire*

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $|z^2 - 1| \leq 8 \implies |z - 2| \leq 5$ .

**EXERCICE 6.**  $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$  *Variation sur l'inégalité triangulaire*

Soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes. Montrer que  $\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1 + |\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$ .

**EXERCICE 7.**  $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \bullet$  *Choisir ses sauts pour aller loin*

Soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe  $S \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$ .

2. Montrer que la constante  $\frac{1}{\pi}$  est optimale, si le nombre de complexes  $z_k$  est arbitrairement grand.

### 2 Équations en nombres complexes

**EXERCICE 8.**  $\diamond - \bullet \circ \circ$  *(In)équations avec des complexes*

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  (on pourra représenter graphiquement les ensembles de solutions) :

1.  $|z - i - 1| = 1$ ;
2.  $1 < |2z - 6| < 2$ ;
3.  $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 < 8$ ;
4.  $|z - 1| + |z + 1| \leq 2$ ;
5.  $|z - 1| < |z|$ ;
6.  $|\operatorname{Re}(z)| < |z|$ ;
7.  $\operatorname{Re}(iz + 2) > 0$ ;
8.  $|z - i|^2 + |z + i|^2 < 2$ .

**EXERCICE 9.** ○○○ *Racines n-èmes*

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $z^2 = 1 - i$ ;
2.  $z^3 = -8$ ;
3.  $z^4 = i$ ;
4.  $z^{25} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

**EXERCICE 10.** ◇ - ●○○ *Équation, à l'envers*

Soit  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Trouver deux réels  $p$  et  $q$  tels que  $z^2 + pz + q = 0$ .

**EXERCICE 11.** ◇ - ●○○ *Racines de l'unité*

Soit  $n \geq 1$  un entier. On note  $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$  les  $n$  racines de l'unité. Montrer que

1.  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = 0$ ;
2.  $\prod_{j=0}^{n-1} \omega_j = (-1)^{n-1}$ ;
3.  $\sum_{j=0}^{n-1} (1 + \omega_j)^n = 2n$ ;
4.  $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{j=0}^{n-1} (z - \omega_j) = z^n - 1$ .

**EXERCICE 12.** ●○○ *Avec le conjugué*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $z^n = \bar{z}$ ;
2.  $1 + \bar{z} = |z|$ ;
3.  $z^4 = z + \bar{z}$ ;

**EXERCICE 13.** ♣/◇ - ●●○ *Équations avec des complexes*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $z^2 - (2+i)z + i + 7 = 0$ ;
2.  $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$ ;
3.  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ ;
4.  $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ ;
5.  $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0$ ;
6.  $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$ .

### 3 Nombres complexes en géométrie

**EXERCICE 14.** ●○○ *Écriture de similitudes*

1. Déterminer l'expression de la similitude, composée de la rotation d'angle  $\pi/3$  et de l'homothétie de rapport 2, toutes deux de centre  $i - 2$ .
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude donnée par

$$f(z) = -3z + 4(1 - 2i).$$

**EXERCICE 15.** ●○○ *Un lieu géométrique*

Soit  $\rho > 0$ , soient  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ . On s'intéresse au lieu  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho|z - z_1|\}$ .

1. Identifier  $E$  si  $\rho = 1$ .
2. On suppose  $\rho \neq 1$ . Montrer que  $E$  est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

**EXERCICE 16.** ◇ - ●○○ *Triangle équilatéral*

Soient  $A, B$  et  $C$  des points du plan, d'affixes  $a, b$  et  $c$ .

1. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct (l'angle  $\widehat{BAC}$  vaut  $\pi/3$ ) ssi

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

2. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral ssi

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

3. Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral (non réduit à un point) dont les trois sommets sont à coordonnées entières.

**EXERCICE 17.** ●●○ *Un invariant des polygones réguliers*

Soient  $S_1, \dots, S_n$  des points du plan, sommets d'un polygone régulier, inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$ .

Montrer que la quantité  $\sum_{k=1}^n S_k M^2$  ne dépend pas du point  $M \in \mathcal{C}$ .

**EXERCICE 18.** ●●○ *Similitude conjuguée*

Soient  $f$  et  $g$  des similitudes directes du plan complexe. Caractériser la similitude  $g \circ f \circ g^{-1}$  quand

1.  $f$  est une translation ;
2.  $f$  est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

**EXERCICE 19.** ♣/◇ - ●●○ *Un parallélogramme*

Déterminer les  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z$  et ses trois racines cubiques forment un parallélogramme.

**EXERCICE 20.** ◇ - ●●○ *Points cocycliques*

Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $1, z, 1/z$  et  $1 - z$  soient cocycliques.

## 4 Trigonométrie

**EXERCICE 21.** ●○○ *Équations trigonométriques*

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\sin(3x + \pi/4) = \sin(x + \pi/3)$ ;      | 3. $\cos(x + \pi/6) \cos(x - \pi/6) = 1/2$ ; |
| 2. $\cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{2} = 0$ ; | 4. $\cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) \leq 1$ .   |

**EXERCICE 22.** ●○○ Valeur de  $\cos(\pi/5)$

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Exprimer  $\cos(5\theta)$  en fonction de  $\cos\theta$ .
2. En déduire la valeur de  $\cos^2(\pi/10)$ , puis la valeur de  $\cos(\pi/5)$ .

**EXERCICE 23.** ●○○ Des sommes trigonométriques

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ . Simplifier les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb); \quad 2. \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb); \quad 3. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kb); \quad 4. \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kb)}{\cos^k(b)}.$$

**EXERCICE 24.** ♣ – ●●○ Polynômes de Tchebychev, première approche

On définit une famille de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence de la façon suivante :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ce sont les polynômes de Tchebychev (de première espèce).

1. Calculer les polynômes  $T_n$ , pour  $n \leq 4$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ .

On admet que  $T_n$  est le seul polynôme  $P$  vérifiant  $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ .

3. En utilisant la formule de Moivre, déterminer une formule explicite pour  $T_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 25.** ●○○ Une fausse formule de Moivre

Pour quels entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  a-t-on :  $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x + i \cos x)^n = \sin(nx) + i \cos(nx)$  ?

**EXERCICE 26.** ◇ – ●●○ Un produit de cosinus et une suite récurrente

Soit  $\theta$  un réel non nul.

$$1. \text{ Simplifier, pour } n \in \mathbb{N}^* : P_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

2. Déterminer la limite de  $P_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On considère la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence par  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ .

3. Étudier la convergence de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**EXERCICE 27.** ♣/◇ – ●●○ Un produit de sinus

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se propose de calculer le produit suivant :  $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .

1. On pose  $R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ . Montrer que  $P_n^2 = R_n$ .

2. Déterminer les  $2n - 1$  solutions complexes non nulles de l'équation  $(z - 1)^{2n} - 1 = 0$ .  
On les note  $z_1, \dots, z_{2n-1}$ .
3. On pose  $U_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ . Exprimer  $U_n$  en fonction de  $R_n$ .
4. Calculer  $U_n$  et en déduire  $P_n$ .

**EXERCICE 28.** ♣/◇ - ●●○ Une somme avec des puissances de tangente

Soient  $n \geq 1$  et  $\alpha \neq \pi/2[\pi]$ . Montrer que  $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1} \alpha = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n \alpha}$ .

**EXERCICE 29.** ♣/◇ - ●●●○ Somme et produit de cosinus

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ . Montrer l'identité  $\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(\theta_k)$ .

## Indications

**Exercice 1.** Exploiter simplement que  $z$  et  $z'$  sont de module 1. Comment caractériser les nombres réels, parmi les nombres complexes ?

**Exercice 3.** Calculer  $z^2$

**Exercice 4.** Adapter le calcul fait pour la somme des coefficients d'indice pair/impair.

**Exercice 5.** Raisonner par contraposée.

**Exercice 7.** Si  $\phi$  est un angle quelconque, considérer les  $z_k$  dont un argument est proche de  $\phi$  à  $\pi/2$  près. Puis déterminer le meilleur  $\phi$  pour optimiser la minoration obtenue.

**Exercice 8.** Si  $a \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , quels sont les  $z$  vérifiant  $|z - a| = r$  ? les  $z$  vérifiant  $|z - a| \leq r$  ?

**Exercice 10.** On cherche un polynôme de degré 2 à coefficients réels dont  $z$  est racine. Choisir simplement l'autre racine.

**Exercice 11.** Les trois premiers calculs sont explicites. Pour le dernier, utiliser les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

**Exercice 13.** 3. se simplifie avec une formule bien connue.

Pour 6., commencer par déterminer  $\frac{1+iz}{1-iz}$ .

**Exercice 16.** Traduire le fait que  $ABC$  est équilatéral direct avec une rotation de centre  $A$ .

**Exercice 19.** Si  $a$  est l'une de ses racines cubiques, comment s'écrivent les 3 autres points ?

**Exercice 20.** On pourra se renseigner sur la notion de birapport.

**Exercice 26.** Pour 1., faire apparaître un produit télescopique.

Pour 2., on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Exercice 27.** Pour la question 4., on utilisera les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

**Exercice 28.** Reconnaître en la somme la partie réelle ou imaginaire d'une puissance développée par la formule du binôme.

**Exercice 29.** On pourra procéder par récurrence.