Semaine 1 - Chapitres de début d'année

1 Logique, raisonnements

- Assertions, connecteurs logiques, conditions nécessaires et suffisantes, assertions équivalentes, réciproque, contraposée, règles de calcul
- Variables, prédicats, quantificateurs
- Négation d'une assertion
- Guide d'écriture d'une démonstration
- Raisonnements par l'absurde, par contraposée, disjonction de cas, analyse-synthèse
- Principe de récurrence, récurrences simple, double, forte
- Théorie des ensembles : ensembles usuels, inclusion et égalité d'ensembles, principe de sélection, ensemble vide, opérations sur les ensembles, produit cartésien d'ensembles, puissance (finie) d'un ensemble, ensembles des parties d'un ensemble

On parlera plus tard d'applications entre ensembles et d'injectivité/surjectivité...

2 Calculs algébriques

- Notation $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i$, où les a_i sont des nombres indexés par un ensemble fini I
- Linéarité
- Changements de variables usuels (décalage, retournement, doublement pour indices pairs/impairs)
- Découpages classiques de sommes
- Somme des termes d'une suite arithmétique/géométrique
- Sommes téléscopiques
- Identité de Bernoulli
- Sommes doubles rectangulaires
- Découpages selon les lignes/les colonnes/les diagonales (dans le cas carré)
- Sommes triangulaires ; découpages
- Découpage $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}$.
  Cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$, pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
- Produits, règles de calcul, transformations somme/produit, factorielle d'un entier

- Coefficients binomiaux. Si $k \notin [\![0, n]\!]$, on a défini $\binom{n}{k} = 0$.
  Aucune interprétation combinatoire pour le moment.
- Formule de symétrie, relation de Pascal, formule du chef $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$
- Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton
- Suites arithmético-géométriques : détermination du terme général
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : détermination du terme général dans le cas complexe/réel
- Résolution d'un système linéaire 2×2 dans le cas d'un déterminant non nul
- Décomposition en éléments simples quand $F = \frac{P}{(X - x_1) \dots (X - x_n)}$, les x_i étant des nombres distincts et P un polynôme de degré $\leq n - 1$ (*aucune preuve exigible*)

3 Nombres réels

- Rappels sur les inégalités entre nombres réels
- Variations sur l'inégalité arithmético-géométrique
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Valeur absolue
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire inversée
- Relation entre valeur absolue, minimum, maximum
- Partie entière, propriétés élémentaires
- Partie entière supérieure, partie fractionnaire (HP)
- Parties denses de $\mathbb{R}$ (une partie A est dense ssi $\forall x < y, A \cap]x, y[\neq \emptyset$)
- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
- Partie majorée, majorant, maximum, borne supérieure
- Caractérisation de la borne supérieure
- Propriété de la borne supérieure
- De même, partie minorée...
- Parties convexes de $\mathbb{R}$
- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$

Aucune caractérisation séquentielle à ce stade.

4 Nombres complexes

- Construction de $\mathbb{C}$ (non exigible)
- $\mathbb{C}$ est un corps (définitions non exigibles)
- Parties réelle et imaginaire, conjugaison, module
- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 : stabilité par $\times$ et passage à l'inverse

- Inégalité triangulaire et cas d'égalité (notion de nombres complexes positivement liés)
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe (*on parle indifféremment de forme trigonométrique ou exponentielle*)
- Formules d'Euler
- Formule de Moivre

Les applications calculatoires classiques ont été vues et seront explicitement au programme la semaine prochaine. À réserver plutôt en fin de colle.

5 Trigonométrie

- Cosinus, sinus, tangente, cotangente d'un angle ; interprétation géométrique
- Périodicités
- Cosinus et sinus des angles $-\theta$, $\pi \pm \theta$ et $\pm\pi/2 \pm \theta$ en fonction de ceux de θ
- Cas d'égalité de deux cosinus, sinus, tangente
- Valeurs remarquables
- Formulaire :
  - $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
  - Formules d'addition/de soustraction pour cosinus, sinus et tangente
  - Formules de duplication
  - Linéarisation de $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$
  - Formules produit vers somme : p. ex. $\cos\theta\cos\phi = \dfrac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$
  - Formules somme vers produit : p. ex. $\cos\theta+\cos\phi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$
  - Paramétrage de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ par $u = \tan(\theta/2)$
- Réécriture de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta+\phi)$

6 Exemples de questions de cours / applications directes du cours

- Une démonstration par récurrence
- Calculs de sommes simples, faisant intervenir des changements de variables
- Identité de Bernoulli
- Manipulations de sommes triangulaires
- Formules sur les coefficients binomiaux
- Formule du binôme de Newton
- Résolution d'une suite arithmético-géométrique/ d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (*dans le cas réel*)
- Un calcul utilisation une décomposition en éléments simples (*restant dans le cadre énoncé*)

- Démonstration de l'inégalité triangulaire inversée
- Énoncer la définition de partie convexe, partie dense, borne supérieure
- Caractérisation de la borne supérieure d'une partie majorée non vide
- Démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$
- Une formule de trigonométrie (en admettant les formules d'addition)
- Calcul de la forme trigonométrique d'un nombre complexe