DS 1 de mathématiques – Corrigé

1 Exercice – Des calculs

1.1 Une limite

a) On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+p)}$. On sait qu'on peut l'écrire sous la forme $\frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+p}$. Pour trouver α, on multiplie par X et on évalue en 0 : on a $\alpha = \frac{1}{p}$; pour trouver β, on multiplie par $X+p$ et on évalue en $-p$: on a $\beta = -\frac{1}{p}$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![-p, 0]\!], \frac{1}{x(x+1)\dots(x+p)} = \frac{1}{(x+1)\dots(x+p-1)} \left(\frac{1/p}{x} - \frac{1/p}{x+p} \right).$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Avec la question précédente, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} \Big).$$

On reconnait une somme téléscopique, qui se simplifie en :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{p} \Big(\frac{1}{1 \times \dots p} - \frac{1}{(N+1)\dots(N+p)} \Big) = \frac{1}{p} \Big(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)\dots(N+p)} \Big).$$

c) Soit $n \geq 1$. On a

$$\frac{1}{\binom{n+p}{p+1}} = \frac{(p+1)!}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

Avec la question précédente, si $N \geq 1$, on a donc :

$$S_N = \frac{(p+1)!}{p} \Big(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)\dots(N+p)} \Big).$$

Dans la parenthèse, le terme de droite tend vers 0 quand $N \to +\infty$. Donc, par opérations élémentaires, $S_N \to \frac{(p+1)!}{p} \times \frac{1}{p!} = \frac{p+1}{p}$.

1.2 Une somme double

a) Par le formule de Pascal, on réécrit dans la somme $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$. La somme vaut donc :

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i}-(-1)^{i-1}\binom{n-1}{i-1}\right) = \binom{n-1}{-1}+(-1)^k\binom{n-1}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}$$

par téléscopage.

b) On note S cette somme. On intervertit les sommes et on a :

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n}{i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}.$$

On simplifie par la formule du chef : $\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}$. Donc,

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n}\big(1-(1-1)^n\big) = \frac{1}{n},$$

par binôme de Newton (en introduisant le terme en $k=0$).

1.3 Une suite homographique

a) On procède par récurrence, le prédicat de récurrence étant défini pour $n \in \mathbb{N}$ par : u_n est bien défini et est dans $\mathbb{R}_+$.

- Pour l'initialisation, on remarque simplement que $u_0 = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est bien défini et $u_n \geq 0$. Comme h est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $u_{n+1} = h(u_n)$ est bien défini. De plus, comme $u_n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+3}{u_n+2}$ est un quotient de deux nombres positifs, donc est positif.

Ceci conclut la récurrence.

b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. On a

$$h(x) = x \iff 4x+3 = x(x+2) \iff x^2-2x-3 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $16 = 4^2$ et les solutions sont donc $\dfrac{2\pm 4}{2}$; donc $h(x) = x \iff x = \alpha$ ou $x = \beta$, avec $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha} = \frac{\frac{4u_n+3}{u_n+2}-3}{\frac{4u_n+3}{u_n+2}+1} \\ &= \frac{4u_n+3-3u_n-6}{4u_n+3+u_n+2} \\ &= \frac{1}{5}\frac{u_n-3}{u_n+1} = \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

d) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-3}{u_0+1} = -3$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{3}{5^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$. Donc, $u_n(v_n-1) = -v_n - 3$ et finalement $u_n = -\frac{v_n+3}{v_n-1}$ (v_n ne vaut jamais 1 d'après l'expression trouvée ci-dessus).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3-\frac{3}{5^n}}{1+\frac{3}{5^n}}$.

2 Exercice – Fractions égyptiennes

1. Par exemple :

$$\forall q \in]0,1[\cap\mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}^* : q = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} \text{ et } \forall i,j \in [\![1,k]\!], i \neq j \implies n_i \neq n_j.$$

2. (a) L'ensemble A des entiers n vérifiant $\frac{1}{n} \leq q$ est non vide car il contient $\lfloor\frac{1}{q}\rfloor + 1$. Donc, A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et admet un minimum.
Supposons par l'absurde que $q' \geq \frac{1}{n}$. On a alors : $q \geq \frac{2}{n} \geq \frac{1}{n-1}$, la dernière inégalité étant vraie car équivalente à $2n-2 \geq n$, donc à $n \geq 2$, ce qui est vrai car $q < 1$. On aurait ainsi une contradiction car on aurait $n-1 \in A$. Ainis, $q' < \frac{1}{n}$.

   (b) On écrit $q = \frac{a}{b}$. Alors, $q' = \frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{na-b}{nb}$. Comme par définition de n, $\frac{1}{n-1} > \frac{a}{b}$, on a $b > na - a$ et donc $na - b < a$. Et $na - b \geq 0$ car $\frac{1}{n} \leq q$; en posant $c = na - b$ et $d = nb$, on a donc ce qu'on demandait.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(k)$ l'assertion suivante : si $q \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$ peut s'écrire $q = \frac{k}{b}$, alors q admet une décomposition en fractions égyptiennes. On montre que $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par récurrence forte.

- Initialisation. Si q s'écrit $\frac{1}{b}$, q admet une décomposition en fractions égyptiennes (à un seul terme).
- Hérédité. Soit $k \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}(i)$ montré pour $i \in [\![1, k-1]\!]$. Soit $q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ admettant une écriture $q = \frac{k}{b}$. On reprend les notations de la question précédente et on a $q' = q - \frac{1}{n}$. Si $q' = 0$, $q = \frac{1}{n}$ et on conclut comme dans l'initialisation. Sinon, par la question 2.b), q' s'écrit $\frac{c}{d}$ avec $0 < c < k$, donc par hypothèse de récurrence, il admet une décomposition en fractions égyptiennes. Comme $q' < \frac{1}{n}$, n ne figure pas dans les dénominateurs d'une telle décomposition. Donc en ajoutant $\frac{1}{n}$ à la décomposition de q', on obtient une décomposition de q en fraction égyptienne, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, $\mathcal{P}(k)$ est montré pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi montré que tout $q \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$ admettait une décomposition en fractions égyptiennes.

3 Exercice – Parties intégrales du plan

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *intégrale* si $\forall z, w \in A, |z - w| \in \mathbb{N}$.

1. On peut considérer les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté 1, par exemple.

2. On peut considérer les quatres sommets d'un rectangle dont la diagonale a une longueur entière. Par exemple, avec largeur 3 et longueur 4, la diagonale vaut 5 par le théorème de Pythagore ; donc ces 4 points conviennent.

3. On a $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$.

4. Si u est rationnel, les nombres $\frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\frac{2u}{1+u^2}$ aussi et $z_u = \frac{1-u^2}{1+u^2} + i\frac{2u}{1+u^2} \in G$. De plus, supposons que $z_u = z_v$. Alors $\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-v^2}{1+v^2}$. Donc, $-1 + \frac{2}{1+u^2} = -1 + \frac{2}{1+v^2}$, ce qui donne $u^2 = v^2$. On a donc $u = \pm v$; et comme on a aussi $\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2v}{1+v^2}$, u et v doivent être de même signe, donc $u = v$.
Ceci montre que des rationnels u distincts donnent des z_u distincts. Comme $\mathbb{Q}$ est infini, G aussi.

5. Soient $z, w \in G'$. On écrit $z = a^2$ et $w = b^2$ avec $a, b \in G$. Alors, $|z - w| = |a^2 - b^2|$. Comme $a, b \in \mathbb{U}$, on peut les écrire $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\phi}$. Alors, $|z - w| = |e^{2i\theta} - e^{2i\phi}| = |\sin(\theta + \phi)|$, après calculs, par la méthode de l'angle moitié.

Mais $\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) \in \mathbb{Q}$ car les cosinus et sinus de θ et ϕ sont rationnels par hypothèse. Donc, $|z-w| \in \mathbb{Q}$.

6. Si z et w sont dans G et vérifient $z^2 = w^2$, on a $z = \pm w$. Comme G est infini et qu'un élément de G' correspond au plus à deux éléments de G, G' aussi est infini.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N points distincts $z_1, \ldots, z_N$ de G'. Par hypothèse, $|z_i - z_j| \in \mathbb{Q}$ pour tous $1 \leq i, j \leq N$. On considère un dénominateur commun q à tous les $|z_i - z_j|$. Alors, pour tous $1 \leq i, j \leq N$, $|qz_i - qz_j| \in \mathbb{N}$ par construction. Et les points $qz_1, \ldots, qz_N$ sont sur le cercle de centre O et de rayon q ; ce qui conclut en prenant $A_N = \{qz_1, \ldots, qz_N\}$.

4 Problème – Des produits remarquables

4.1 Une formule pour les nombres de Fibonacci

1. La suite de Fibonacci est récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 - X - 1$, dont les racines sont ϕ et ψ. D'après le cours, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n.$$
Avec $n = 0$, on trouve $\lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$; avec $n = 1$, on trouve $\lambda\phi + \mu\psi = 1$, donc $\lambda(\phi - \psi) = 1$. Ainsi, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, d'où le résultat.

2. L'équation $z^n - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est polynomiale de degré n et a pour racines les ω^k, pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Par factorisation complète, on a donc :
$$\forall z \in \mathbb{C}, z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k).$$

3. On substitue $\dfrac{\phi}{\psi}$ à z dans l'identité précédente. On a donc :
$$\frac{\phi^n}{\psi^n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\phi}{\psi} - \omega^k\right).$$
On multiplie par ψ^n à gauche, ce qui revient à multiplier par ψ chaque facteur à droite :
$$\phi^n - \psi^n = \prod_{k=0}^{n-1}(\phi - \omega^k\psi).$$
A droite, le facteur pour $k = 0$ vaut $\phi - \psi = \sqrt{5}$. En divisant par ce facteur et en utilisant la question 1., on obtient :
$$F_n = \prod_{k=1}^{n-1}(\phi - \omega^k\psi).$$

4. Si $k \in [\![1, \frac{n-1}{2}]\!]$, on a $\overline{\omega^k} = \omega^{-k} = \omega^{n-k}$. Car ω est une racine n-ème de l'unité. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} F_n &= \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\phi - \omega^k \psi) \times \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} (\phi - \omega^k \psi) \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\phi - \omega^k \psi) \times \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} (\phi - \omega^{n-\ell} \psi) \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\phi - \omega^k \psi)\overline{(\phi - \omega^k \psi)} \text{ car } \phi \text{ et } \psi \text{ sont réels} \\ F_n &= \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left|\phi - \omega^k \psi\right|^2 \end{aligned}$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\phi - \omega^k \psi|^2 = |\phi|^2 + |\omega^k \psi|^2 - 2\mathrm{Re}(\phi \omega^{-k} \psi) = \phi^2 + \psi^2 - 2\phi\psi \cos(2k\pi/n)$.

   On calcule rapidement $\phi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\psi^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\phi\psi = -1$. Donc, $|\phi - \omega^k \psi| = 3 + 2\cos(2k\pi/n)$. Ainsi,

$$F_n = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \big(3 + 2\cos(2k\pi/n)\big).$$

6. Quand n est pair, on part de la même identité $\phi^n - \psi^n = \prod_{k=0}^{n-1} (\phi - \omega^k \psi)$. De nouveau, le terme $k = 0$ vaut $\sqrt{5}$, tandis que le terme $k = n/2$ vaut $\phi - (-1)\psi = \phi + \psi = 1$. On trouve donc :

$$F_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n/2}}^{n-1} (\phi - \omega^k \psi).$$

   On peut rassembler les facteurs 2 par 2 comme précédemment ; on trouve cette fois :

$$F_n = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \big(3 + 2\cos(2k\pi/n)\big).$$

4.2 Un cas particulier du théorème de Kronecker-Weber

7. Une racine carrée de -1 vaut $\pm i$. Or i et $-i$ sont dans $\mathbb{U}_4$, donc dans $\mathbb{U}_\infty$, donc dans $\mathcal{C}$. Ceci montre $\mathcal{P}(-1)$.

On a $\sqrt{2} = 2 \times \cos(\pi/4) = e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}$. Comme $e^{\pm i\pi/4}$ sont des racines 8-èmes de l'unité, elles sont dans $\mathcal{C}$, donc $\sqrt{2}$ est dans $\mathcal{C}$. De même, $-\sqrt{2} = -e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}$ est dans $\mathcal{C}$. On a montré $\mathcal{P}(2)$.

8. Soient $z, w \in \mathcal{C}$. On peut trouver $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}$, $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{U}_\infty$ tels que
$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \text{ et } w = \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell w_\ell.$$
Donc, $zw = \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq \ell\leq m}} (a_k b_\ell) z_k w_\ell$. Les $a_k b_\ell$ sont entiers ; on aura conclu si on montre que $z_k w_\ell \in \mathbb{U}_\infty$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $\ell \in [\![1, m]\!]$.
Fixons de tels k et ℓ. On peut trouver $r, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $z_k \in \mathbb{U}_r$ et $w_\ell \in \mathbb{U}_p$ par définition de $\mathbb{U}_\infty$. Alors, $(z_k w_\ell)^{rp} = (z_k^r)^p \times (w_\ell^p)^r = 1$, donc $z_k w_\ell \in \mathbb{U}_{rp} \subset \mathbb{U}_\infty$. Ceci conclut.

9. On remarque que 1 n'est pas solution. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Comme $\sum_{k=0}^{p-1} z^k = \frac{z^p - 1}{z - 1}$, z est solution ssi z est une racine p-ème de l'unité. Les solutions sont donc les $p - 1$ racines p-èmes de l'unité, distinctes de 1.

10. On peut écrire les solutions de l'équation précédente comme ω^k, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$. Comme on a trouvé $p-1$ solutions à une équation polynomiale de degré $p-1$ (et de coefficient dominant 1), on a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{p-1} z^k = \prod_{k=1}^{p-1} (z - \omega^k).$$
L'évaluation en 1 donne l'identité souhaitée.

11. On sépare les facteurs d'indice pair et impair et on change la variable d'indexation. On obtient :
$$p = \prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{2\ell}) \times \prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{2\ell-1}).$$
De plus, $\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{2\ell-1}) = \prod_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{2(\frac{p+1}{2} - m) - 1}) = \prod_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{p-2m})$ par retournement $m = \frac{p-1}{2} - \ell$. Ceci s'écrit encore $\prod_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 - \omega^{2(p-m)})$ car $\omega^p = 1$. Avec un nouveau retournement $j = p - m$, cela vaut finalement : $\prod_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} (1 - \omega^{2j})$.

Donc, $p = \prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(1-\omega^{2\ell}) \times \prod_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(1-\omega^{2j}) = \prod_{\ell=1}^{p-1}(1-\omega^{2\ell})$.

Pour la deuxième égalité, on factorise chaque facteur par ω^ℓ et on sépare le produit :

$$p = \prod_{\ell=1}^{p-1}\omega^\ell \times \prod_{\ell=1}^{p-1}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell).$$

Le premier produit vaut $\omega^{\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell} = \omega^{p(p-1)/2} = (\omega^p)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, ce qui conclut.

12. Par retournement $m = p - \ell$ (c'est le dernier !), on a :

$$\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell) = \prod_{m=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega^{m-p}-\omega^{p-m}) = \prod_{m=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega^m-\omega^{-m}).$$

On multiplie chaque facteur par -1. Comme il y a $\dfrac{p-1}{2}$ facteurs, on obtient :

$$\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\prod_{m=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega^{-m}-\omega^m) = \prod_{m=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega^{-m}-\omega^m),$$

car $\dfrac{p-1}{2}$ est pair, par hypothèse. Ceci conclut la question.

13. Par la deuxième égalité de la question 11 et la question précédente, on a donc $p = \Big(\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell)\Big)^2$. D'où $\sqrt{p} = \pm\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell)$. Pour tout ℓ, ω^ℓ et $\omega^{-\ell}$ sont dans $\mathbb{U}_p$, donc dans $\mathbb{U}_\infty$. Donc, les facteurs $\omega^{-\ell}-\omega^\ell$ sont dans $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par produit par la question 8, on en déduit que $\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-\ell}-\omega^\ell) \in \mathcal{C}$. Et donc son opposé aussi. Ainsi, $\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$ sont dans $\mathcal{C}$, ce qui montre $\mathcal{P}(p)$.

14. Remarquons que $\mathcal{P}(0)$ est vrai en considérant une somme vide d'éléments de $\mathbb{U}_\infty$.
Soit $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. On peut écrire n sous la forme $n = 2^\alpha p$, où $\alpha \in \mathbb{N}$ et p est un entier relatif impair. Soit δ une racine carrée de n. Alors, δ peut s'écrire $\sqrt{2}^\alpha \times \varepsilon$, où ε est une racine carrée de p. On distingue maintenant deux cas.

- Si $p \equiv 1\,[4]$, alors par la question précédente $\varepsilon \in \mathcal{C}$; et par la question 7, $\sqrt{2} \in \mathcal{C}$. Donc, par stabilité par produit (question 8), $\delta \in \mathcal{C}$.
- Si $p \equiv 3\,[4]$, alors $-p \equiv 1\,[4]$ et on écrit plutôt $\delta = i\sqrt{2}^\alpha \times i\varepsilon$. Comme $i\varepsilon$ est une racine carrée de $-p$, il est dans $\mathcal{C}$. Par la question 7, i et $\sqrt{2}$ sont aussi 77dans $\mathcal{C}$. Par produit, δ est dans $\mathcal{C}$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les racines carrées de n sont dans $\mathcal{C}$, ce qui conclut la preuve.