

DS 1 de mathématiques

Durée : 3h30. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...

Les trois exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Des calculs

1.1 Une limite

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels α, β tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \llbracket -p, 0 \rrbracket, \frac{1}{x(x+1) \dots (x+p)} = \frac{1}{(x+1) \dots (x+p-1)} \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+p} \right).$$

b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1) \dots (N+p)} \right).$$

c) En déduire la limite, quand $N \rightarrow +\infty$, de $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\binom{n+p}{p+1}}$.

1.2 Une somme double

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la valeur de $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i}$.

On pourra deviner la formule en considérant le cas $n = 4$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{k=i+1}^n \frac{1}{k}$.

1.3 Une suite homographique

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $h : x \mapsto \frac{4x+3}{x+2}$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

- a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- b) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \mid h(x) = x\}$ a exactement deux éléments, qu'on notera α et β , avec $\alpha < \beta$.
- c) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de v_{n+1} en fonction de v_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- d) En déduire la valeur de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Exercice – Fractions égyptiennes

Un nombre rationnel $q \in]0, 1[$ admet une décomposition en fractions égyptiennes si on peut l'écrire comme la somme d'un nombre fini d'inverses d'entiers naturels non nuls, **deux à deux distincts**.

1. Écrire un énoncé formel traduisant le fait qu'un nombre rationnel $q \in]0, 1[$ admet une décomposition en fractions égyptiennes.
2. Soit q un nombre rationnel dans $]0, 1[$. On note n le plus petit entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n} \leq q$ et on pose $q' = q - \frac{1}{n}$.
 - (a) Montrer que n est bien défini et que $q' < \frac{1}{n}$.
 - (b) Montrer que si $q = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, alors $\exists c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}^* : q' = \frac{c}{d}$ et $c < a$.
3. En déduire par récurrence que tout nombre rationnel dans $]0, 1[$ admet une décomposition en fractions égyptiennes. *On attend une rédaction soignée.*

3 Exercice – Parties intégrales du plan

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *intégrale* si $\forall z, w \in A, |z - w| \in \mathbb{N}$.

1. Donner un exemple de partie intégrale formée de 3 points non alignés.
2. Donner un exemple de partie intégrale formée de 4 points, tels que 3 quelconques de ces points ne soient pas alignés.

3. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Rappeler sans démonstration les formules exprimant $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de $u = \tan(\theta/2)$.
4. On note G l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont les parties réelle et imaginaire sont dans $\mathbb{Q}$. Montrer que G est infini.
5. On note $G' = \{z^2, z \in G\}$. Montrer que $\forall z, w \in G', |z - w| \in \mathbb{Q}$.
6. En déduire que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une partie intégrale A_N formée de N points cocycliques¹.

4 Problème – Des produits remarquables

4.1 Une formule pour les nombres de Fibonacci

On note $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par récurrence double par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. On note $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$.

2. Justifier l'identité $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. En déduire que $F_n = \prod_{k=1}^{n-1} (\phi - \omega^k \psi)$.

On suppose désormais que n est impair.

4. Montrer que $F_n = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |\phi - \omega^k \psi|^2$.

5. En déduire l'existence de $a, b \in \mathbb{Z}$ indépendants de n tels que

$$F_n = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(a + b \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right).$$

6. Énoncer une formule analogue quand n est pair, en précisant brièvement les modifications à apporter aux calculs.

¹c'est-à-dire sur un même cercle

4.2 Un cas particulier du théorème de Kronecker-Weber

On note $\mathbb{U}_\infty$ l'ensemble de toutes les racines de l'unité : $\mathbb{U}_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : z^n = 1\}$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de $\mathbb{U}_\infty$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{k=1}^n m_k z_k ; n \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}_\infty \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante : *Si $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine carrée² de n alors $\delta \in \mathcal{C}$.* On cherche à montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

7. Montrer $\mathcal{P}(-1)$ et $\mathcal{P}(2)$.

8. Montrer que pour tous $z, w \in \mathcal{C}$, $zw \in \mathcal{C}$.

On fixe $p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$.

9. Déterminer les solutions complexes de l'équation $\sum_{k=0}^{p-1} z^k = 0$.

10. En déduire que $p = \prod_{k=1}^{p-1} (1 - \omega^k)$, où $\omega = e^{2i\pi/p}$.

11. Montrer les égalités $p = \prod_{\ell=1}^{p-1} (1 - \omega^{2\ell}) = \prod_{\ell=1}^{p-1} (\omega^{-\ell} - \omega^\ell)$.

12. Montrer que $\prod_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} (\omega^{-\ell} - \omega^\ell) = \prod_{\ell=\frac{p+1}{2}}^{p-1} (\omega^{-\ell} - \omega^\ell)$.

13. En déduire $\mathcal{P}(p)$.

14. Conclure, en montrant que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

²On a donc $\delta = \pm\sqrt{n}$ quand $n \geq 0$ et $\pm i\sqrt{-n}$ sinon