

Semaine 2 - Nombres complexes, trigonométrie, fonctions

Les rappels et le formulaire de trigonométrie ont été inclus au milieu du cours sur les nombres complexes.

Pour les résolutions d'équations, on insiste particulièrement sur la rédaction d'un raisonnement par équivalences.

1 Nombres complexes

- Construction de $\mathbb{C}$ (non exigible)
- $\mathbb{C}$ est un corps (définitions non exigibles)
- Parties réelle et imaginaire, conjugaison, module
- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 : stabilité par $\times$ et passage à l'inverse
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité (notion de nombres complexes positivement liés)
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe (*je parle indifféremment de forme trigonométrique ou exponentielle*)
- Formules d'Euler
- Formule de Moivre
- Applications calculatoires :
 - méthode de l'angle moitié,
 - linéarisation de $\cos^k \theta$ ou $\sin^k \theta$,
 - expression de $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$,
 - calcul des sommes $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.
- Résolution de l'équation $z^2 = w$ (où w est donné sous forme trigonométrique ou sous forme algébrique). *On peut parler de racines carrées d'un nombre complexe (avec l'article indéfini) mais la notation $\sqrt{w}$ suppose $w \in \mathbb{R}_+$*
- Équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes : expression des solutions
- Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2.
- Propriétés des polynômes à coefficients complexes (admises pour le moment)
 - Principe d'identification des coefficients quand une égalité polynomiale est vraie en suffisamment de points
 - Factorisation complète d'un polynôme de degré n dont on connaît n racines
 - Théorème de d'Alembert-Gauss
- Racines n -èmes d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique
- Cas particulier des racines de l'unité. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des solutions de $z^n = 1$. Ce sont les puissances de $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

- Notation $j = e^{2i\pi/3}$; $1 + j + j^2 = 0$
- Fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$; propriété fondamentale
- Résolution de l'équation $\exp(z) = w$, si $w \in \mathbb{C}^*$
- Interprétation géométrique des nombres complexes : module de z , module de $z - w$, rapport $\frac{c - a}{b - a}$ si a, b et c sont les affixes de trois points A, B et C . *On peut identifier un point et son affixe.*
- Condition d'alignement, d'orthogonalité de trois points
- Similitudes (directes) du plan. *Rien sur les similitudes indirectes.*
- Les similitudes préservent l'alignement des points et les rapports de longueur.
- Une similitude est ou bien l'identité, ou bien une translation de vecteur non nul, ou bien la composée d'une rotation et d'une homothétie autour d'un (unique) point fixe
- Les similitudes forment un groupe.

2 Trigonométrie

- Cosinus, sinus, tangente, cotangente d'un angle ; interprétation géométrique
- Périodicités
- Cosinus et sinus des angles $-\theta$, $\pi \pm \theta$ et $\pm\pi/2 \pm \theta$ en fonction de ceux de θ
- Cas d'égalité de deux cosinus, sinus, tangente
- Valeurs remarquables
- Formulaire :
 - $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$;
 - Formules d'addition/de soustraction pour cosinus, sinus et tangente
 - Formules de duplication
 - Linéarisation de $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$
 - Formules produit vers somme : p. ex. $\cos \theta \cos \phi = \frac{\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)}{2}$
 - Formules somme vers produit : p. ex. $\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$
 - Paramétrisation de $\cos \theta$, $\sin \theta$ et $\tan \theta$ par $u = \tan(\theta/2)$
- Réécriture de $a \cos \theta + b \sin \theta$ en $r \cos(\theta + \phi)$

3 Fonctions de la variable réelle

On pourra proposer des exercices nécessitant des études simples de fonctions, avec les outils de Terminale.

- Monotonie, parité, périodicité
- Graphe d'une fonction obtenue à partir d'une autre par une transformation simple
- Majorant, minorant, maximum, minimum.
- Une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée.
- Asymptotes horizontales, verticales, obliques

4 Exemples de questions de cours / applications directes du cours

- Détermination des racines carrées/ racines n -èmes d'un nombre complexe
- Résolution d'une équation polynomiale de degré 2
- Calcul de sommes trigonométriques
- Une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée.
- Étude simple de fonction