DM 4 - Fonctions absolument monotones

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est *absolument monotone* (A.M. dans la suite) si elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

1 Généralités

1. Montrer qu'une fonction A.M. est positive et croissante.
2. Montrer la formule de Leibniz : si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ définies sur un intervalle I, alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et
$$\forall k \in [\![0, n]\!], (fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$
3. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions A.M. sont des fonctions A.M.
4. Montrer que si f est A.M. sur I alors $\exp \circ f$ est A.M. sur I.
5. Y a-t-il une réciproque à la question précédente ?

2 La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$.

6. Soit g la fonction définie de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$.
   Calculer $g^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire que g est A.M. sur $]0, 1[$.
8. On définit f sur $]0, 1[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f est A.M. sur $]0, 1[$.
9. En déduire que la fonction Arcsin est A.M. sur $]0, 1[$.

3 Différences finies

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et h est un réel, on définit la fonction $\Delta_h(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x).$$
On définit récursivement les fonctions $\Delta_h^n(f)$ par : $\Delta_h^0(f) = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_h^{n+1}(f) = \Delta_h\big(\Delta_h^n(f)\big)$.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soient h et x des réels.
    Exprimer $\Delta_h^2(f)(x)$ en fonction de $f(x)$, $f(x+h)$ et $f(x+2h)$.

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour tous réels x et h :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).$$

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *totalement monotone* (T.M.) si : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \Delta_h^n f(x) \geq 0$.

4 Absolument monotone $\Longrightarrow$ totalement monotone

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit x un réel. Pour tout entier naturel n, on définit la fonction $X_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $X_n : h \mapsto \Delta_h^n f(x)$.

12. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} est dérivable et que, pour tout $h > 0$:
$$X'_{n+1}(h) = (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h).$$

13. Montrer que si f est dérivable et satisfait, pour tout $h > 0$, $\Delta_h^n(f') \geq 0$ alors, pour tout $h > 0$, $\Delta_h^{n+1}(f) \geq 0$.

14. En déduire que si f est A.M., alors elle est T.M.

5 Totalement monotone $\Longrightarrow$ absolument monotone

15. Montrer que toute fonction T.M. est positive et croissante.

On admet :

- l'identité algébrique suivante : si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n. \end{cases}$$

- l'égalité de Taylor-Lagrange : si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tous réels $a < b$ et pour tout entier naturel n, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

16. On suppose f T.M. et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que f est A.M.

17. *Question ouverte.* Existe-t-il des fonction T.M. qui ne soient pas de classe $\mathscr{C}^\infty$?