# ~~DS 1 de mathématiques~~ DM 3 — Corrigé.

~~*Durée : 3 heures.* Tout appareil électronique est interdit.~~

~~Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement.~~

~~**Les trois exercices sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.**~~

## Exercice 1. – *Théorème de Beatty*

On dit de deux parties $A$ et $B$ d'un ensemble $E$ qu'elles forment une partition de $E$ si $A$ et $B$ sont non vides, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

Si $\alpha > 1$ est un réel, on note

$$B_\alpha = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Beatty :

*Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels strictement plus grands que 1. Les ensembles $B_\alpha$ et $B_\beta$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont irrationnels et vérifient $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.*

Si $m$ est dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$f_\alpha(m) = \Big|\{p \in B_\alpha \mid p \leq m\}\Big|,$$

où $|E|$ désigne le cardinal (= nombre d'éléments) de l'ensemble fini $E$.

1. Soient $\alpha > 1$ un réel, soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_\alpha(m)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\frac{m+1}{\alpha} - 1 \leq f_\alpha(m) < \frac{m+1}{\alpha}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\dfrac{f_\alpha(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel que l'on précisera.

Soient $\alpha, \beta > 1$ tels que $B_\alpha$ et $B_\beta$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

4. Montrer que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, puis que $\alpha$ et $\beta$ le sont.

On suppose maintenant que $\alpha$ et $\beta$ sont deux irrationnels strictement plus grands que 1 tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ (et on ne fait plus d'hypothèses sur $B_\alpha$ et $B_\beta$).

5. Montrer que $B_\alpha$ et $B_\beta$ sont disjoints.

6. Montrer que pour tout $m \geq 1$, $f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m$, puis conclure.

## Solution 1

1. Commençons par remarquer que si $n, p$ sont deux entiers distincts, alors $\lfloor n\alpha \rfloor \neq \lfloor p\alpha \rfloor$. En effet, on peut supposer, par symétrie, que $n < p$. Alors $p\alpha - n\alpha \geq (n+1)\alpha - n\alpha = \alpha > 1$, de sorte que $p\alpha$ et $n\alpha$ ne peuvent pas avoir la même partie entière.

   On en déduit que $f_\alpha(m) = \Big|\{n \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor n\alpha \rfloor \leq m\}\Big|$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences suivantes :

   $$\lfloor n\alpha \rfloor \leq m \iff n\alpha < m+1 \iff n < \frac{m+1}{\alpha}.$$

   - Si $\dfrac{m+1}{\alpha}$ est un entier, cela équivaut à $1 \leq n \leq \dfrac{m+1}{\alpha} - 1$ et il y a $\dfrac{m+1}{\alpha} - 1$ valeurs possibles pour $n$.
   - Si $\dfrac{m+1}{\alpha}$ n'est pas un entier, cela équivaut à $1 \leq n \leq \lfloor \dfrac{m+1}{\alpha} \rfloor$ et il y a $\lfloor \dfrac{m+1}{\alpha} \rfloor$ valeurs possibles pour $n$.

   Dans les deux cas, ce nombre de valeurs $f_\alpha(m)$ vérifie bien la double inégalité

   $$\frac{m+1}{\alpha} - 1 \leq f_\alpha(m) < \frac{m+1}{\alpha}.$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a donc, en divisant par $m$ l'inégalité précédente :

   $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m\alpha} - \frac{1}{m} \leq \frac{f_\alpha(m)}{m} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m}.$$

   Les membres de gauche et de droite tendent vers $\dfrac{1}{\alpha}$ quand $m$ tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes, on a donc

   $$\lim_{m \to +\infty} \frac{f_\alpha(m)}{m} = \frac{1}{\alpha}.$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

   Comme $B_\alpha$ et $B_\beta$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, l'union
$$\{p \in B_\alpha \mid p \leq m\} \cup \{p \in B_\beta \mid p \leq m\}$$
   est disjointe et vaut $[\![1, m]\!]$. Donc, en prenant les cardinaux :
$$\forall m \in \mathbb{N}^*, f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m.$$
   En divisant par $m$ et en faisant tendre $m$ vers l'infini, on obtient l'égalité $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, d'après la question précédente.

4. Supposons par l'absurde que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est un nombre rationnel, qu'on écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a donc $q\alpha = p\beta$ et donc $\lfloor q\alpha \rfloor = \lfloor p\beta \rfloor$. Cet élément est donc commun à $B_\alpha$ et $B_\beta$, ce qui contredit le fait que ces deux ensembles sont disjoints. Donc $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est un nombre irrationnel.

   De l'égalité $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, on obtient $1 + \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha$. Ainsi, $\alpha$ est irrationnel. De même, $\beta$ est irrationnel.

5. Par l'absurde, supposons l'existence d'un élément $n \in B_\alpha \cap B_\beta$. On peut donc trouver $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = \lfloor p\alpha \rfloor$ et $n = \lfloor q\beta \rfloor$. On a donc :
$$n \leq p\alpha < n + 1 \text{ et } n \leq q\beta < n + 1.$$
   En divisant la première inégalité par $\alpha$ et la deuxième par $\beta$ :
$$\frac{n}{\alpha} \leq p < \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \text{ et } \frac{n}{\beta} \leq q < \frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta}.$$
   En sommant les deux inégalités et en utilisant que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, on obtient :
$$n \leq p + q < n + 1.$$
   Comme $n$, $p$ et $q$ sont des entiers, c'est absurde. Donc $B_\alpha$ et $B_\beta$ sont disjoints.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités de la question 1, pour $\alpha$ et $\beta$ et on obtient :
$$(m+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - 1 - 1 \leq f_\alpha(m) + f_\beta(m) < (m+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right).$$
   D'où, $m - 1 \leq f_\alpha(m) + f_\beta(m) < m + 1$. Et donc $f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m - 1$ ou $m$ (car $f_\alpha(m)$ et $f_\beta(m)$ sont entiers).

Mais si on avait $f_\alpha(m)+f_\beta(m) = m-1$, on aurait les deux égalités $f_\alpha(m) = \dfrac{m+1}{\alpha} - 1$ et $f_\beta(m) = \dfrac{m+1}{\beta} - 1$, qui contredisent l'irrationalité de $\alpha$ et $\beta$. Donc,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme les ensembles $B_\alpha$ et $B_\beta$ sont disjoints, c'est aussi le cas des ensembles $B_\alpha \cap [\![1, m]\!]$ et $B_\beta \cap [\![1, m]\!]$. Comme la somme de leurs cardinaux vaut $m$, cardinal de $[\![1, m]\!]$, on en déduit que tout élément de $[\![1, m]\!]$ est dans $B_\alpha$ ou $B_\beta$.

Le raisonnement étant valide pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $B_\alpha$ et $B_\beta$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

La question 4 montrait un sens du théorème de Beatty, celle-ci montre l'autre sens. On a donc démontré ce théorème.

## ~~**Exercice 2.** — *Théorème de Zeckendorf*~~

O~~n définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e~~t

$$\forall \cancel{n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}}.$$

L~~e but de l'exercice est de montrer le théorème de Zeckendorf~~ :

*P~~our tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers uniques $k_1, \ldots, k_N$~~ t~~els que~~ :*

- ~~$\forall i \in [\![1, N-1]\!], k_{i+1} \geq k_i + 2$ ;~~
- ~~$n = F_{k_N} + F_{k_{N-1}} + \cdots + F_{k_1}$~~.

~~Autrement dit, tout entier naturel non nul $n$ s'écrit de manière unique comme une somme de termes non consécutifs~~ (et d'indice $\geq 2$) dans la suite de Fibonacci. On appellera d~~écomposition de Zeckendorf de $n$ cette écritu~~re.

1. D~~éterminer la décomposition de Zeckendorf de 17 et de 52.~~
2. ~~Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que $F_k \leq n < F_{k+1}$~~
3. Dé~~montrer que tout~~ [redacted] ~~une décomposition de Zeckendorf.~~
4. Dé~~montrer que pour tout entier $n \geq 2$,~~

$$\cancel{F_n - 1 = \sum_{\substack{k=2 \\ k \equiv n-1 [2]}}^{n-1} F_k}.$$

5. En ~~déduire, pour tout $n \geq 1$, l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de $n$.~~

# DM 3 – Corrigé : Points rationnels du plan

## 1 Problème - Points rationnels du plan

### 1.1 Points rationnels sur le cercle trigonométrique

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$|z_u|^2 = \frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2} + \frac{(2u)^2}{(1+u^2)^2} = \frac{1-2u^2+u^4+4u^2}{(1+u^2)^2} = 1.$$

Donc, $z_u \in \mathbb{U}$.

2. Soit $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$. Considérons $\theta \in ]-\pi, \pi[$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Notons $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, bien défini car $\frac{\theta}{2} \in ]-\pi/2, \pi/2[$. On sait que $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$. Donc, $z = z_u$. L'unicité de $u$ tel que $z = z_u$ se déduit par exemple de la caractérisation comme coefficient directeur dans la question suivante.

3. Soit $u \in \mathbb{R}$. La pente entre les points $-1$ et $u$ vaut par définition

$$p = \frac{\frac{2u}{1+u^2} - 0}{\frac{1-u^2}{1+u^2} - (-1)} = \frac{2u}{1-u^2+(1+u^2)} = u.$$

Pour le dessin (*à faire*), on fait figurer $u$ sur l'axe des ordonnées. Le point $z_u$ est l'unique point d'intersection du cercle trigonométrique et de la droite reliant le point $(-1, 0)$ au point $(0, u)$.

4. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrons que $z_u \in \mathbb{Q}[i] \iff u \in \mathbb{Q}$.

   - Si $u \in \mathbb{Q}$, on a $\frac{1-u^2}{1+u^2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{2u}{1+u^2} \in \mathbb{Q}$. Donc, $z_u \in \mathbb{Q}[i]$.
   - Réciproquement, on suppose que $z_u \in \mathbb{Q}[i]$. Par la question précédente, $u$ est le coefficient directeur de la droite reliant les deux points $-1$ et $z_u$, à coordonnées rationnelles. Donc, $u \in \mathbb{Q}$.

**Bilan :** $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i] = \left\{z_u, u \in \mathbb{Q}\right\} \cup \{-1\}$.

5. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Le triplet $(a, b, c)$ est pythagoricien ssi $a^2 + b^2 = c^2$ ssi $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ ssi $\frac{a}{c} + i\frac{b}{c} \in \mathbb{U}$. Comme $\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}$ est dans $\mathbb{Q}[i]$, cela revient à demander que $\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}$ est dans $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$. Ainsi, si $(a, b, c)$ est pythagoricien, on peut trouver $u \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{a}{c} + i\frac{b}{c} = z_u$ (en effet, $-1$ est exclu pour des raisons de signe). De plus, comme $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont strictement positifs, le point $z_u$ doit être à parties réelle et imaginaire strictement positives. On se convainc

aisément que cela revient à demander que $u \in ]0,1[$. En écrivant $u = \dfrac{q}{p}$ avec $0 < q < p$, on a donc

$$\frac{a}{c} = \frac{1-\frac{q^2}{p^2}}{1+\frac{q^2}{p^2}} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \text{ et } \frac{b}{c} = \frac{2\frac{q}{p}}{1+\frac{q^2}{p^2}} = \frac{2pq}{p^2+q^2}.$$

Réciproquement, si ces égalités sont satisfaites, on a immédiatement que $a^2+b^2=c^2$, donc $(a,b,c)$ est pythagoricien.

## 1.2 Polygones réguliers à sommets rationnels

1. *Au brouillon.* On cherche une formule reliant $\cos((n+1)\theta)$, $\cos(n\theta)$ et $\cos((n+2)\theta)$. Or,

   $\cos((n+2)\theta) = \cos\theta\cos((n+1)\theta) - \sin\theta\sin((n+1)\theta)$ et $\cos(n\theta) = \cos\theta\cos((n+1)\theta) + \sin\theta\sin((n+1)\theta)$.

   D'où, $\cos((n+2)\theta)+\cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$, ce qu'on peut réécrire en $2\cos((n+2)\theta) + 2\cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\times 2\cos((n+1)\theta)$. Donc, les polynômes doivent vérifier :

   $$P_{n+2}(2\cos\theta) + P_n(2\cos\theta) = (2\cos\theta)P_{n+1}(2\cos\theta).$$

   Ceci incite à poser $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

   *Au propre.* On considère $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définies par récurrence double par $P_0 : x \mapsto 2$, $P_1 : x \mapsto x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} : x \mapsto xP_{n+1}(x) - P_n(x)$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est une application polynomiale à coefficients entiers.
   Par récurrence double, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant 1.

   - Pour $n = 1$, $P_1 : x \mapsto x$ est de degré 1 et de coefficient dominant égal à 1.
   - Pour $n = 2$, $P_2 : x \mapsto x^2 - 2$ est de degré 2 et de coefficient dominant égal à 1.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie aux rangs $n$ et $n+1$. Alors, $P_{n+2} : x \mapsto xP_{n+1}(x) - P_n(x)$. Comme $P_n$ est de degré $n$ et $P_{n+1}$ de degré $n+1$, $P_{n+2}$ est de degré $1+(n+1) = n+2$. De plus, le coefficient dominant de $P_{n+2}$ est celui de $x \mapsto xP_{n+1}(x)$, qui est donc le coefficient dominant de $P_{n+1}$, à savoir 1.

   Ceci conclut ce point, par récurrence double.

   Par récurrence double, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante est vraie : $\forall\theta \in \mathbb{R}, P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

   - Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, 2\cos(0\theta) = 2$ et $2\cos(1\theta) = 2\cos\theta$. La définition de $P_0$ et $P_1$ montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie aux rangs $n$ et $n+1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que

     $$\cos\big((n+2)\theta\big) + \cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big).$$

     Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire :

     $$2\cos\big((n+2)\theta\big) = 2\cos\theta P_{n+1}(2\cos\theta) - P_n(2\cos\theta) = P_{n+2}(2\cos\theta),$$

     au vu de la définition de $P_{n+2}$. Ceci montre l'hérédité et conclut la récurrence.

2. Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $P(q) = 0$. On écrit $q$ sous la forme $q = \dfrac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux. On a donc :
$$\frac{a^n}{b^n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{a^k}{b^k} = 0.$$
En multipliant par $b^n$, on en déduit :
$$a^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k a^k b^{n-k} = 0.$$
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n-k \geq 1$. Donc, on peut factoriser la somme par $b$ : cette somme est donc divisible par $b$. Donc, $b$ divise $a^n$. Mais comme on a supposé $a$ et $b$ premiers entre eux, $b$ est aussi premier avec $a^n$. Ce n'est possible que si $b = \pm 1$, c'est-à-dire si $q \in \mathbb{Z}$.

3. Écrivons $r$ sous la forme $r = \dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a donc $2br\pi = 2a\pi$, d'où $\cos(2br\pi) = 1$. Par construction, le polynôme $P_b$ est tel que $P_{2b}\big(2\cos(r\pi)\big) = 2\cos(2br\pi) = 2$. D'où l'égalité $P_n\big(2\cos(r\pi)\big) - 2 = 0$, avec $n = 2b$.

4. L'application polynomiale $x \mapsto P_n(x) - 2$ est, comme $P_n$, à coefficients entiers, de degré $n$ et de coefficient dominant 1. D'après la question précédente, $2\cos(r\pi)$ en est une racine, et elle est supposée rationnelle. D'après la question 2, on a donc $2\cos(r\pi) \in \mathbb{Z}$. Comme $\cos(r\pi) \in [-1, 1]$, les seules possibilités sont $\cos(r\pi) = 0, \pm 1$ ou $\pm 2$. Cela revient à dire que $\cos(r\pi) \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

5. Notons $A$ cet ensemble. Par ce qui précède, si $\theta \in A$, alors $\cos\theta \in \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$. Avec $\theta \in [0, 2\pi[$, les possibilités sont $\theta = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 3\pi/2$ et $5\pi/3$. Réciproquement, ces angles sont dans $A$ (puisque ce sont des multiples rationnels de $\pi$ et que leur cosinus est rationnel).

6. (a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k - \omega = e^{2ik\pi/n}(a_0 - \omega)$.

   (b) On somme la relation précédente pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = n\omega + (a_0 - \omega) \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = n\omega$$
car la somme des $n$ racines de l'unité vaut 0 (dès que $n \geq 2$, ce qui est le cas ici). Ainsi, $\omega = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}{n} \in \mathbb{Q}[i]$, puisque chaque $a_k$ est dans $\mathbb{Q}[i]$.

   (c) La relation de la question $(a)$ peut être réécrite, pour $k = 1$, comme $e^{2i\pi/n} = \dfrac{a_1 - \omega}{a_0 - \omega}$. Or, $a_1 - \omega$ et $a_0 - \omega$ sont tous deux dans $\mathbb{Q}[i]$. D'après le lemme ci-dessous, on en déduit que $e^{2i\pi/n} \in \mathbb{Q}[i]$. En particulier, $\cos(2\pi/n) \in \mathbb{Q}$.

   Lemme : si $z \in \mathbb{Q}[i]$ et $w \in \mathbb{Q}[i] - \{0\}$, alors $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{Q}[i]$.
   On écrit $z = x + iy$ et $w = u + iv$ avec $x, y, u, v \in \mathbb{Q}$ et $(u, v) \neq (0, 0)$. Alors $\dfrac{z}{w} = \dfrac{(x+iy)(u-iv)}{u^2+v^2} = \dfrac{xu+yv}{u^2+v^2} + \dfrac{-xv+yu}{u^2+v^2}$. Comme le produit et la somme de rationnels est un rationnel, on en déduit que $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{Q}[i]$.

(d) D'après la question précédente, l'angle $2\pi/n$ est donc dans l'ensemble trouvé à la question 5. On a donc $n = 3$ ou $n = 4$. Cependant, on peut exclure le cas $n = 3$ : l'argument de la question précédente montre en effet de même que $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ doit être rationnel, mais $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ne l'est pas. Donc, $n = 4$.
Réciproquement, il existe bien des carrés à sommets entiers, par exemple le carré de sommets $1$, $i$, $-1$ et $-i$.