

Semaine 3 - Fonctions de la variable réelle

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Vocabulaire

- Monotonie, parité, périodicité
- Graphe d'une fonction obtenue à partir d'une autre par une transformation simple
- Majorant, minorant, maximum, minimum.
- Une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée.
- Asymptotes horizontales, verticales, obliques

1.2 Continuité, dérivabilité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Nombre dérivé, fonction dérivée, développement limité à l'ordre 1, tangente
- Signe de la dérivée et variations sur un intervalle
- Dérivée d'une bijection réciproque
- Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe C^k , $k \geq 1$, de classe C^∞ .
La formule de Leibnitz est hors programme.

1.3 Fonctions à valeurs complexes

- Partie réelle, partie imaginaire, module d'une fonction à valeurs complexes
- Parité, périodicité, fonction bornée
- Une fonction est bornée ssi son module est une fonction majorée
- Continuité, dérivabilité, règles de calcul
- Dérivée de $\exp \circ \gamma$, où $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$

1.4 Plan d'étude d'une fonction

1. Domaine de définition
2. Étude des symétries
3. Réduction du domaine d'études
4. Calcul des variations
5. Calcul des limites et valeurs particulières
6. Tracé de la courbe. On fait figurer les asymptotes, éventuellement des valeurs et tangentes particulières

2 Fonctions usuelles

- Fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dérivée k -ème
- Fonctions polynomiales. Principe d'identification des coefficients : deux fonctions polynomiales égales ont des coefficients égaux.
- Fonctions rationnelles.
- Fonctions exponentielle et logarithme. Valeur approchée de e et $\ln 2$. Notation b^a . Fonctions exponentielles et logarithme de base b ; nombre de chiffres dans l'écriture décimale. Fonctions puissances généralisées $x \mapsto x^a$, a réel. Dérivée. Notation $\sqrt[n]{}$.
- Fonctions trigonométriques circulaires. Dérivées (le reste a été vu précédemment)
- Domaine de bijectivité de \cos , \sin , \tan . Définition de \arccos , \arcsin , \arctan . Graphes. Dérivées. Relations $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$ et $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x)\pi/2$.
- Fonctions hyperboliques ch , sh et th . Graphes. Dérivées. Relation fondamentale $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.
- Trigonométrie hyperbolique réciproque (HP). Définition de argch , argsh et argth . Dérivée et formules.

3 Introduction à l'analyse asymptotique

L'objectif est d'avoir un premier aperçu des techniques asymptotiques utilisant les notations \sim et o . Les principales règles de calcul ont été données, sans trop de formalisme.

- Fonctions équivalentes au voisinage d'un réel ou d'un infini
- Équivalent en $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale, d'une fonction rationnelle
- Équivalent $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$ si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$
- Équivalents usuels en 0
- Fonction négligeable devant une autre
- Théorèmes de croissance comparée
- Aperçu de l'échelle des ordres de grandeur des fonctions en $+\infty$

4 Exemples de questions de cours

- Définition d'une notion sur les fonctions
- Une étude de fonction
- Démonstration d'inégalités par étude de fonction
- Dérivée d'une fonction obtenue comme bijection réciproque (avec le calcul)
- Allure graphique d'une fonction usuelle
- Formule de trigonométrie circulaire et circulaire réciproque
- Définition des fonctions hyperboliques
- Calcul de limites avec/sans outils asymptotiques