

Semaine 4 - Calcul intégral

1 Fonctions usuelles

Reprise du programme précédent.

2 Primitives et intégrales

- Primitive d'une fonction (à valeurs réelles ou complexes)
- Existence et unicité à une constante additive près de la primitive d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$
- Primitives usuelles
- Notion naïve d'intégrale : aire algébrique sous la courbe représentative de la fonction
- $\int_a^b f$ quand $a = b$ ou $a > b$
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes
- Linéarité de l'intégrale ; relation de Chasles ; propriété de positivité, croissance pour une fonction à valeurs réelles
- Théorème fondamental de l'analyse. Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $a \in I$, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a
- Variante : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ si F est une primitive quelconque de f
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable dans une intégrale.
Le calcul de la nouvelle intégrale se fait en manipulant formellement les infinitésimaux dx et dt .

3 Calculs pratiques

- Primitives de fonctions de la forme $x \mapsto P(x) \cos(ax)e^{\gamma x}$, où P est un polynôme à coefficients réels, a et γ sont des réels.
Dans la pratique, on aura souvent un produit de deux facteurs seulement.
- Primitives de fonctions de la forme $\cos^p \times \sin^q$.
La linéarisation fonctionne toujours mais est rarement le plus rapide.

Seront traités lundi matin.

- Intégrales des fonctions rationnelles.

On traitera sur des exemples le cas d'un dénominateur de degré ≤ 2 . Les calculs nécessitant une division euclidienne de polynômes seront guidés.

- Intégrales des fonctions rationnelles en $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$ fonctionne toujours ; règles de Bioche pour les changements de variable $u = \cos(\theta)$, $u = \sin(\theta)$ et $u = \tan(\theta)$. (*Hors Programme.*)

4 Questions de cours

Pas de questions de cours. La colle est tournée vers le calcul pratique. Les exercices plus théoriques sont à réserver pour la deuxième moitié de l'heure de colle. Un autre chapitre sera consacré aux aspects plus théoriques de l'intégration sur un segment.