Calcul intégral

Jeremy Daniel

Connais-tu l'animal qui inventa le calcul intégral ?

Évariste

1 Primitives et intégrales

1.1 Primitives

Définition 1.1 (Primitive)
Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$, et à valeurs réelles ou complexes. Une fonction F, définie sur A, est une primitive de f si F est dérivable et $F' = f$.

Proposition 1.2 (Structure, sur un intervalle)
Si f est définie sur un intervalle I et si F est une primitive de f, alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $F_C : x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante (réelle ou complexe) quelconque.

Exercice 1.3
Quelles sont les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$?

Théorème 1.4 (Existence)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, f admet une primitive F.

Proposition 1.5 (Primitives usuelles)
On donne ci-dessous une primitive de fonctions élémentaires définies sur des intervalles.

Fonction	***Primitive***	***Intervalle***
$x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	I_α $(*)$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_-^*$ *ou* $\mathbb{R}_+^*$
$\exp$	$\exp$	$\mathbb{R}$
$\cos$	$\sin$	$\mathbb{R}$
$\sin$	$-\cos$	$\mathbb{R}$
$\tan$	$-\ln \circ \|\cos\|$	$]-\pi/2, \pi/2[$ $(**)$
$\dfrac{1}{\cos^2}$	$\tan$	$]-\pi/2, \pi/2[$ $(**)$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin$	$]-1, 1[$
$\ln$	$x \mapsto x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
ch	sh	$\mathbb{R}$
sh	ch	$\mathbb{R}$
th	$\ln \circ \mathrm{ch}$	$\mathbb{R}$

$(*)$ *L'intervalle* I_α *vaut* $\mathbb{R}$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_-^*$ *ou* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $\alpha \in \mathbb{Z} - \big(\mathbb{N} \cup \{-1\}\big)$ *et* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
$(**)$ *Ou tout intervalle de la forme* $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.6 (Dérivée d'une fonction composée, à l'envers)
Soient I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *Soient* $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *deux fonctions dérivables. Une primitive de* $f' \times g' \circ f$ *est* $g \circ f$.

Exercice 1.7
Trouver une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x}{2x^2+3}$
2. $f_2(x) = 3(\sin x)e^{\cos x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x}{(x^2+3)^3}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x}{\cos^2(2x^2+1)}$
6. $f_6(x) = x^2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}$

1.2 Propriétés de l'intégrale

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.8 (Intégrale d'une fonction continue)
On admet provisoirement que, pour tous réels $a < b$ et toute fonction f continue de $[a, b]$

dans $\mathbb{K}$, on peut définir une quantité appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et notée $\displaystyle\int_a^b f$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- **Linéarité.** Si f, g sont continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$
- **Relation de Chasles.** Si $c \in]a,b[$ et si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, alors
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
- **Positivité.** Si f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- **Normalisation.** Pour tous $a < b$, $\displaystyle\int_a^b 1 = b - a$.

Remarque 1.9
Si f est à valeurs réelles, $\displaystyle\int_a^b f$ peut être interprétée comme l'aire algébrique contenue entre l'axe des abscisses, le graphe de f et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarque 1.10
Si f est à valeurs complexes, on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$.

Notation 1.11
On note ausi $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ l'intégrale de f sur $[a,b]$. Dans cette deuxième notation (la plus courante dans les calculs), x est une variable muette et peut être remplacée par une autre variable.

Définition 1.12 (Extension à des bornes quelconques)
Soient $a \geq b$ deux réels. Si f est continue sur $[b,a]$, on définit :
$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f(x)dx & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.13
On vérifie que la relation de Chasles $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ reste valable, quel que soit l'ordre des variables a, b et c.

Proposition 1.14 (Croissance et inégalité triangulaire)
Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

- ***Croissance.*** *Si $f \leq g$, alors* $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- ***Inégalité triangulaire.*** *On a* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

1.3 Théorèmes majeurs du calcul intégral

Théorème 1.15 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a un point de I. La fonction F, définie sur I par $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 1.16
Soit f une fonction continue entre a et b. Soit F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Notation 1.17
On utilise la notation $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ pour désigner la quantité $F(b) - F(a)$. S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrira plus simplement $[F(x)]_a^b$.

Corollaire 1.18 (Dérivée d'une intégrale avec bornes variables)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient α et β deux fonctions dérivables de J dans I. La fonction G définie sur J, par

$$G : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, G'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x)\big).$$

Théorème 1.19 (Intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exercice 1.20
Donner une primitive des fonctions f et g définies par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = \arctan x$.

Théorème 1.21 (Changement de variable)
Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soit f une fonction continue, définie sur $\phi(I)$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b f\big(\phi(x)\big)\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du.$$

Remarque 1.22
Afin de simplifier le changement de variable, on appliquera la méthode suivante :
- On définit u comme une quantité dépendant de x.
- On en déduit du en écrivant formellement que $du = u'(x)dx$.
- Dans l'intégrale initiale, on utilise les quantités u et du pour se débarrasser des x. À la fin, il ne doit pas y avoir cohabitation entre les deux variables.
- On change les bornes de l'intégrale ; l'intégrale de a à b devient une intégrale de $u(a)$ à $u(b)$.
- Le u dans l'intégrale doit maintenant être considéré comme une variable (muette). En particulier, dériver u n'a aucun sens.

Exercice 1.23
Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$.
On utilisera le changement de variable $u = \cos x$.

2 Calculs pratiques

2.1 Recherche de primitives

Méthode 2.1 (Primitive de $P(x)\cos(ax)e^{\gamma x}$)
On considère une fonction f de la forme $f : x \mapsto P(x)\cos(ax)e^{\gamma x}$ où P est une fonction polynomiale à valeurs réelles ; a et γ sont des réels (ou de même en remplaçant cos par sin).
1. On commence par écrire que $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$. Ainsi $f(x) = \mathrm{Re}\big(P(x)e^{(\gamma+ia)x}\big)$. On est donc ramené à chercher une primitive de $g : x \mapsto P(x)e^{wx}$, où $w = \gamma + ia$.
2. On cherche une primitive de g sous la forme $G : x \mapsto Q(x)e^{wx}$, où Q est une fonction polynomiale de même degré que P. Après calculs, Q doit vérifier $Q' + wQ = P$.
3. On trouve Q en identifiant les coefficients et en résolvant le système.
4. On obtient une primitive de f en prenant la partie réelle de G.

Remarques 2.2
- Si f est de la forme $x \mapsto P(x)\cos(ax)$ ou $x \mapsto P(x)\sin(ax)$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de facteur exponentiel, il peut être plus rapide de chercher directement une primitive de f de la forme $F : x \mapsto Q_1(x)\cos(ax) + Q_2(x)\sin(ax)$, où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes (de degré inférieur à celui de P).

- L'égalité $f(x) = \mathrm{Re}\big(P(x)e^{wx}\big)$ repose sur le fait que P est à valeurs réelles et que γ est réel. Si ce n'est pas le cas, on écrira plutôt $\cos(ax) = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})$ et on cherchera séparément les primitives des deux termes obtenus. Puis on utilise la linéarité pour conclure.
- Dans certains cas simples, on peut aussi écrire une primitive recherchée comme intégrale et procéder par intégration par parties.

Exercice 2.3
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
1. $f_1 : x \mapsto \cos(x)e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;
2. $f_2 : x \mapsto x^2 e^{3x}$;
3. $f_3 : x \mapsto x \sin(3x) e^{2x}$.

Méthode 2.4 (Primitive de $\cos^p(x)\sin^q(x)$)
Pour obtenir une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$, où $p, q \in \mathbb{N}$, on peut linéariser l'expression et obtenir directement une primitive de la forme linéarisée.

Remarques 2.5
- On peut généraliser cette méthode à un produit quelconque de fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(bx)$, où a et b sont des réels quelconques, qui peuvent être distincts. On dispose en effet de formules de linéarisation pour $\cos(ax)\cos(bx)$, $\cos(ax)\sin(bx)$ et $\sin(ax)\sin(bx)$.
- Si on a aussi des facteurs polynomiaux/exponentiels, on commence par linéariser et on se ramène au point précédent.
- Dans certains cas, on pourra reconnaître la dérivée d'une fonction composée, ce qui est bien plus rapide.

Exercice 2.6
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
1. $f_1 : x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$;
2. $f_2 : x \mapsto x\cos^3 x$;
3. $f_3 : x \mapsto \sin x \cos^n x$ $(n \in \mathbb{N})$.

2.2 Fonctions rationnelles, un aperçu

Exercice 2.7
Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+3}$;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$;
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$;
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-4x+8}$;
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$;

7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

2.3 Règles de Bioche (HP)

Méthode 2.8 (Règles de Bioche)

On considère une fonction f de la forme $f : x \mapsto \dfrac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$, où P et Q sont des polynômes en deux variables. Autrement dit, f est une fonction obtenue en utilisant uniquement les quatre opérations élémentaires et les fonctions élémentaires cos et sin.

On suppose qu'on doit en calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (p. ex. pour trouver une primitive de f). Notons formellement $\omega(x) = f(x)dx$.

On applique le changement de variable suivant :

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$, on pose $u = \cos x$;
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pose $u = \sin x$;
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pose $u = \tan x$;
- Si ω n'a aucune des symétries précédentes, on pose $u = \tan(x/2)$.

Alors, on est ramené à calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle en u.

Attention !

Le dernier changement de variable peut donner lieu à des calculs très pénibles. On ne l'utilise qu'en dernier recours.

Exercice 2.9

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^3 x \sin^2 x dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx$.

Remarque 2.10

Pour les intégrales des fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$, on pourra faire le changement de variable $u = \cos x$ si q est impair $u = \sin x$ si p est impair. Quand p et q sont pairs, on doit linéariser.