DS 2 de mathématiques – Corrigé

1 Contrôle technique

1. Notons I cette intégrale. On pose $u = \sqrt{x}$. On a $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \dfrac{dx}{2u}$. Donc,

$$I = 2\int_2^3 \ln(u-1)du = 2\big[(u-1)\ln(u-1) - (u-1)\big]_2^3 = 4\ln 2 - 2.$$

2. **Une formule avec arcsin.**

   (a) Comme $\sqrt{x} \in [0,1]$, $\arcsin(\sqrt{x})$ est bien défini. On a

   $$\sin(2\arcsin(\sqrt{x}) - \pi/2) = -\cos(2\arcsin(\sqrt{x})) = 2\sin^2(\arcsin(\sqrt{x})) - 1 = 2x - 1.$$

   Comme $\arcsin(\sqrt{x}) \in [0, \pi/2]$, $2\arcsin(\sqrt{x}) - \pi/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$. Donc, par définition de arcsin, $\arcsin(2x-1) = 2\arcsin(\sqrt{x}) - \pi/2$. On en déduit la formule annoncée :

   $$\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

   (b) Soit $x \in]0,1[$. Les fonctions dans les membres de gauche et droite de l'égalité précédente sont dérivables en x par opérations usuelles (*on a bien éliminé* 0 *et* 1 *pour éviter les problèmes de non-dérivabilité de* $\sqrt{\ }$ *et* arcsin) de dérivée respective :

   $$\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

   Ces deux dérivées étant égales sur $]0,1[$, il existe une constante C telle que :

   $$\forall x \in]0,1[, \arcsin(\sqrt{x}) = C + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

   Les deux membres étant définis sur $[0,1]$ et y étant continus, l'égalité est en fait valable sur $[0,1]$. En considérant la valeur en 0, on a $0 = C + \dfrac{1}{2}\arcsin(-1) = C - \dfrac{\pi}{4}$. Donc, $C = \dfrac{\pi}{4}$, ce qui conclut.

3. **Fonction de Lambert.**

(a) Par produit, f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et $f'(t)=(t+1)e^t$, pour tout $t\geq -1$. On a $f'\geq 0$ sur $[-1,+\infty[$ avec égalité seulement en -1, donc f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.
De plus, $f(-1)=-1/e$, $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ et f est continue. On en déduit que f est une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $[-1/e,+\infty[$ (*soit par ce qu'on appelle en Terminale le théorème de la bijection ; soit en séparant l'argument d'injectivité (qui vient de la stricte croissance) et l'argument de surjectivité (qui vient de la continuité et du calcul des valeurs/limites aux bornes)*).

(b) Soit $x\in]-1/e,+\infty[$. On remarque que $t=W(x)>-1$ car $W(-1)=-1/e$. D'après le calcul précédent de la dérivée, on a donc $f'(t)\neq 0$. Donc, W est dérivable en x de dérivée :

$$W'(x)=\frac{1}{f'(t)}=\frac{1}{(t+1)e^t}=\frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}=\frac{1}{x+e^{W(x)}},$$

la dernière égalité venant de ce que par définition $W(x)e^{W(x)}=f(W(x))=x$.

2 Un autre calcul de $\zeta(2)$

Voir en fin de document

3 π est irrationnel

Voir en fin de document

4 Intégrales impropres et transformation de Laplace

4.1 Propriétés de $\mathcal{R}(I)$

1. Soit $x>a$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^x \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)dt=\lambda\int_a^x f(t)dt+\mu\int_a^x g(t)dt.$$

Le membre de droite converge vers $\lambda\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt+\mu\int_a^{+\infty} g(t)dt$ par opérations élémentaires sur les limites. Ceci montre en même temps que $\lambda f+\mu g\in\mathcal{R}(I)$ et que

$$\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)dt=\lambda\int_a^{+\infty} f(t)dt+\mu\int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

2. Soit $x > a$. Par relation de Chasles, on a

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt.$$

Si $f_{|J} \in \mathcal{R}(J)$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. Par opérations sur les limites, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ a aussi une limite finie quand $x \to +\infty$ et on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

On montre de même que si $f \in \mathcal{R}(I)$, alors $f_{|J} \in \mathcal{R}(J)$ et que la même formule est vérifiée, en écrivant que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$, pour tout $x > a$.

3. Soit $x > 1$. On calcule, si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Ceci a une limite finie quand $x \to +\infty$ ssi $\alpha > 1$ et cette limite vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.
Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ n'a pas une limite finie quand $x \to +\infty$.

4. Soit f une fonction continue sur $I = [a, +\infty[$ telle que $|f| \in \mathcal{R}(I)$. On cherche à montrer que $f \in \mathcal{R}(I)$.

   (a) Soit $x \in I$. La quantité $f_+(x) - f_-(x)$ vaut $f(x) - 0 = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ et $0 - (-f(x)) = f(x)$ si $f(x) \leq 0$. On a donc toujours $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.
   De même, la quantité $f_+(x) + f_-(x)$ vaut $f(x) + 0 = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ et $0 - f(x) = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$; c'est donc $|f(x)|$ dans les deux cas : $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

   (b) On a supposé que $|f| \in \mathcal{R}(I)$. On peut donc trouver $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_a^x |f(t)|dt \leq M$. Comme f_+ et f_- sont positives, $f_+ \leq |f|$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^x f_+(x)dx \leq \int_a^x |f(x)|dx \leq M$, pour tout $x \in I$ (*notons que f_+ est continue puisque $f_+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, de même pour f_-*) ; comme f_+ est positive, $f_+ \in \mathcal{R}(I)$. De même, $f_- \in \mathcal{R}(I)$.
   Comme $f = f_+ - f_-$, la question 1. montre que f est aussi dans $\mathcal{R}(I)$.

4.2 Transformation de Laplace

5. Soit $x > 0$, soit $X > 0$. On calcule

$$\int_0^X \mathbb{1}(t)e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=X} = \frac{1-e^{-xX}}{x}.$$

Quand $X \to +\infty$, ceci converge vers $\frac{1}{x}$.
Donc, $\mathbb{1} \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{1})(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$.

6. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$. On note $M > 0$ un réel tel que $|f| \leq M$. Soit $x > 0$, soit $X > 0$. On a

$$\int_0^X |f(t)|e^{-tx}dt \leq M \int_0^X e^{-tx}dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{M}{x}.$$

Ceci étant valable pour tout $X > 0$, la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-tx}$ est dans $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+)$, donc $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ aussi. Comme $x > 0$ est quelconque, f est dans $\mathcal{S}$.

7. Soit $x > 0$. On cherche une primitive de $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$. Une primitive de $t \mapsto e^{(i-x)t}$ est $t \mapsto \frac{e^{(i-x)t}}{i-x}$. Une primitive de $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ est obtenue en en prenant la partie imaginaire ; après calculs, $t \mapsto \frac{-e^{-xt}}{1+x^2}(\cos t + x\sin t)$ convient. Dès lors,

$$\int_0^X \sin(t)e^{-xt}dt = \left[\frac{-e^{-xt}}{1+x^2}(\cos t + x\sin t)\right]_{t=0}^{t=X} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-xX}}{1+x^2}(\cos X + x\sin X).$$

On prend la limite de cette expression quand $X \to +\infty$. Le facteur $\cos X + x\sin X$ est borné tandis que e^{-xX} tend vers 0, donc le terme $\frac{e^{-xX}}{1+x^2}(\cos X + x\sin X)$ tend vers 0. Par opérations élémentaires, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. **Dérivée de $\mathcal{L}(f)$.**

   (a) Notons $M > 0$ un réel tel que $|f| \leq M$. Soit $X > 0$. On a

$$\int_0^X |g(t)|e^{-tx}dt \leq M\int_0^X te^{-tx}dt = M\Big([-\frac{t}{x}e^{-tx}]_{t=0}^X + \int_0^X \frac{e^{-tx}}{x}dt\Big) \leq \frac{M}{x}\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{M}{x^2}.$$

   Donc, $|g| \in \mathcal{S}$, et donc $g \in \mathcal{S}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déjà, $E(x)$ est positif car intégrale entre 0 et 1 d'une fonction positive. Soit $u \in [0,1]$. On a $|(1-u)e^{xu}| \leq |1-u|e^{|xu|} \leq e^{|x|}$. Donc, par croissance de l'intégrale, $E(x) \leq \int_0^1 e^{|x|}du = e^{|x|}$.

De plus, $E(x) = \left[\frac{(1-u)e^{xu}}{x}\right]_{u=0}^{u=1} + \frac{1}{x}\int_0^1 e^{xu}du = -\frac{1}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}$. On isole e^x et on trouve :

$$e^x = 1 + x + x^2 E(x).$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{f(t)e^{-t(x+h)} - f(t)e^{-tx}}{h} + tf(t)e^{-tx} = f(t)e^{-tx}\Big(\frac{e^{-th}-1}{h} + t\Big) = ht^2 f(t)e^{-tx}E(-th).$$

On intègre entre 0 et $+\infty$:

$$\frac{\mathcal{L}(f)(x+h) - \mathcal{L}(f)(x)}{h} + \mathcal{L}(g)(x) = h\int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-tx}E(-th)dt.$$

(d) On veut montrer que le membre de gauche tend vers 0 quand $h \to 0$. Il s'agit donc de montrer que $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-tx}E(-th)dt \to 0$ quand $h \to 0$. On fixe $X > 0$ et on note M un majorant de $|f|$. Par inégalité triangulaire, croissance de l'intégrale et l'esptimation sur E, question 8.b), on a :

$$\Big|\int_0^X t^2 f(t)e^{-tx}E(-th)dt\Big| \leq M\int_0^X t^2 e^{-t\big(x-|h|\big)}dt.$$

L'intégrale de droite est calculée par deux IPP successives :

$$\int_0^X t^2 e^{-t\big(x-|h|\big)}dt = \frac{X^2}{x-|h|}e^{-X(x-|h|)} + \frac{2X}{(x-|h|)^2}e^{-X(x-|h|)} + \frac{2}{(x-|h|)^2}(1-e^{-X(x-|h|)}).$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on a donc :

$$\Big|\int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-tx}E(-th)dt\Big| \leq \frac{2M}{(x-|h|)^2}.$$

Finalement, $\Big|\frac{\mathcal{L}(f)(x+h) - \mathcal{L}(f)(x)}{h} + \mathcal{L}(g)(x)\Big| \leq \frac{2Mh}{(x-|h|^2)}$, qui tend vers 0, quand $h \to 0$; ce qui conclut.

4.3 Calcul de l'intégrale de Dirichlet

9. La continuité de sinc sur $\mathbb{R}_+^*$ s'obtient par opérations élémentaires. On sait que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1, ce qui justifie la continuité en 0.

De plus, sinc est une fonction bornée. En effet, si $x \geq 0$, $|\sin x| = \left|\int_0^x \cos(t)dt\right| \leq \int_0^x |\cos(t)|dt \leq \int_0^x 1dt = x$, de sorte que $|\operatorname{sinc}|$ est majorée par 1. Par la question 6, $\operatorname{sinc} \in \mathcal{S}$.

10. Soit $X > 1$. On a $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin t}{t}dt = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}dt$.
L'intégrale de droite converge quand $X \to +\infty$. En effet, $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est dans $\mathcal{R}([1,+\infty[)$. De plus, le crochet converge vers $\cos 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin t}{t}dt$ converge quand $X \to +\infty$. Donc, $\displaystyle\int_0^X \operatorname{sinc}(t)dt = \int_0^1 \operatorname{sinc}(t)dt + \int_1^X \frac{\sin t}{t}dt$ aussi.
Donc, $\operatorname{sinc} \in \mathcal{R}(I)$.

11. La fonction sinc est bornée donc – par la question 8. – $\mathcal{L}(\operatorname{sinc})' = -\mathcal{L}(\sin)$. On a calculé $\mathcal{L}(\sin)$, question 7. On a donc :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(\operatorname{sinc})' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}(\operatorname{sinc})(x) = C - \arctan(x)$, pour $x > 0$.

12. Soit $x > 0$. Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale (étendue à une borne infinie), on a

$$\left|\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)e^{-tx}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}.$$

Donc, $\mathcal{L}(\operatorname{sinc})(x) \to 0$, quand $x \to 0$. Comme $\arctan(x)$ tend vers $\pi/2$, quand $x \to +\infty$, on en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$.

13. Pour tout $x > 0$, on a $\mathcal{L}(\operatorname{sinc})(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. On fait tendre x vers 0 ; avec le fait admis, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)dt = \frac{\pi}{2}$.

[redacted] Corrigé Exo 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(x^k i^{2n+1-k} - x^k(-i)^{2n+1-k}\right).$$

Pour k impair, $2n+1-k$ est pair de sorte que $(-i)^{2n+1-k}$ vaut i^{2n+1-k}. Donc :

$$P_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} 2\binom{2n+1}{k} x^k i^{2n+1-k}.$$

Par le changement de variable $l = 2k$, on obtient :

$$P_n(x) = 2i\sum_{l=0}^{n} \binom{2n+1}{2l} x^{2l} i^{2(n-l)} = 2i\sum_{l=0}^{n} \binom{2n+1}{2l} x^{2l}(-1)^{n-l}.$$

En posant, pour tout x réel, $Q_n(x) = 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^k(-1)^{n-k}$, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x^2) = P_n(x).$$

2. On a $q_n = 2i\binom{2n+1}{2n} = 2i(2n+1)$ et

$$q_{n-1} = -2i\binom{2n+1}{2n-2} = -2i\binom{2n+1}{3} = -2i\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
P_n(x) = 0 &\iff (x+i)^{2n+1} = (x-i)^{2n+1} \\
&\iff \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{2n+1} = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, 2n]\!], \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = -i\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = -i\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}} \frac{2\cos(\frac{k\pi}{2n+1})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{2n+1})} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1}).
\end{aligned}$$

(*On passe de* $k \in [\![0, 2n]\!]$ *à* $k \in [\![1, 2n]\!]$ *car* $\frac{x+i}{x-i}$ *ne peut pas valoir* 1.)

Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, notons $x_k = \text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})$. Comme la fonction cotan est injective sur $]0, \pi[$, les x_k sont distincts. On a bien trouvé (les) $2n$ racines réelles distinctes de P_n.

4. Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, on a avec les notations précédentes :

$$Q_n(x_k^2) = P_n(x_k) = 0.$$

Donc, les réels x_k^2 sont des racines réelles de Q_n. Cependant, des formules $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ (valables pour $x \in \mathbb{R}$), on déduit aisément que $\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}\, x$ (là où la formule a un sens). Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{k\pi}{2n+1} = \pi - \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$. Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$x_k^2 = x_{2n+1-k}^2.$$

Enfin, les réels $x_1^2, \ldots, x_n^2$ sont deux à deux distincts (car $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts et positifs).

Finalement, $x_1^2, \ldots, x_n^2$ sont (les) n racines réelles distinctes de Q_n.

5. On applique la relation donnée au polynôme Q_n. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = -\frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

Or, $-\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{2n(2n-1)}{6}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{2n(2n-1)}{6}.$$

6. Soit $x \in]0, \pi/2[$. On commence par remarquer que les inégalités à prouver sont équivalentes à

$$\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, cela revient à montrer :

$$\tan^2 x > x^2 > \sin^2 x.$$

Par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, c'est encore équivalent à

$$\tan x > x > \sin x.$$

Sur $]0, \pi/2[$, on pose $f(x) = x - \tan x$ et $g(x) = x - \sin x$. On a, pour $x \in [0, \pi/2[$, $f'(x) = 1 - (1 + \tan^2 x) \leq 0$ (et ne s'annule qu'en 0) et $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ (et ne s'annule qu'en 0). Donc, f est strictement décroissante sur $[0, \pi/2[$ et g y est strictement croissante.

Donc, pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$f(x) < f(0) = 0 = g(0) < g(x).$$

Ce qui est équivalent à $\tan x > x > \sin x$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$. Donc, en sommant les inégalités précédentes entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

En reportant les valeurs trouvées pour les sommes et en simplifiant :

$$\pi^2 \frac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} + \pi^2 \frac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2}.$$

La fraction $\dfrac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2}$ tend vers $\dfrac{4}{6 \times 4} = \dfrac{1}{6}$ quand n tend vers l'infini.

Donc les membres de gauche et de droite tendent tous deux vers $\dfrac{\pi^2}{6}$. Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[redacted]

[redacted]

[redacted] Corrigé Exo 3

1. (a) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Une récurrence rapide permet d'affirmer que

$$g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \text{ et } h_n^{(k)} : x \mapsto (-b)^k \frac{n!}{(n-k)!}(a-bx)^{n-k}$$

si $k \leq n$. Et si $k > n$, alors $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$ sont nulles. On en déduit :

- Si $k \in [\![0, n]\!]$, $g_n^{(k)}(0) = h_n^{(k)}(\pi) = 0$; $g_n^{(k)}(\pi) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\pi^{n-k}$; $h_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(-b)^k a^{n-k}$.
- Si $k = n$, $g_n^{(n)}(0) = g_n^{(n)}(\pi) = n!$ et $h_n^{(n)}(0) = h_n^{(n)}(\pi) = (-b)^n n!$
- Si $k > n$, $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$ sont nulles.

(b) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. On applique la formule de Leibniz :

$$\forall x \in [0, \pi], f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} g_n^{(l)}(x) h_n^{(k-l)}(x).$$

D'après la question précédente, toutes les dérivées de g_n sont nulles en 0, sauf $g_n^{(n)}(0) = n!$. Ainsi, si $k < n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$. Et si $k \geq n$,

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!} \binom{k}{n} g_n^{(n)}(0) h_n^{(k-n)}(0) \\ &= \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! \frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n} a^{2n-k} \\ &= \binom{k}{n} \frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n} a^{2n-k} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De même, si $k < n$, $g_n^{(k)}(\pi) = 0$ et si $k \geq n$,

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(\pi) &= \frac{1}{n!}\binom{k}{k-n} g_n^{(k-n)}(\pi) h_n^{(n)}(\pi) \\ &= \frac{1}{n!}\binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}\pi^{2n-k}(-b)^n n! \\ &= \binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}a^{2n-k}(-1)^n b^{k-n} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{x}{k}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq 2x$. Alors, pour tout $n \geq N$:

$$\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{x}{k} \times \prod_{k=N}^{n} \frac{x}{k} \leq \prod_{k=1}^{N-1} \frac{x}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}.$$

Ainsi, la suite positive $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est majorée par une suite géométrique de raison $1/2$: elle tend donc vers 0.

(b) Par un calcul rapide de dérivée, on a que $x \mapsto x(a-bx)$ atteint son maximum en $x = \dfrac{a}{2b} = \pi/2$. Ainsi,

$$\forall x \in [0, \pi], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n.$$

Comme de plus, $0 \leq \sin \leq 1$ entre 0 et π, la propriété de croissance de l'intégrale donne :

$$0 \leq A_n \leq \int_0^\pi \left(\frac{a\pi}{4}\right)^n dx = \pi\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n.$$

Par la question précédente et le théorème d'encadrement, on en déduit que (A_n) tend vers 0. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0, 1[$ (A_n est toujours strictement positive).

3. On procède par intégration par parties successives : (en intégrant à gauche et en dérivant à droite)

(f,g deux f° C^∞ sur $[a, b]$)

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(N)} g &= [f^{(N-1)}(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f^{(N-1)} g' \\ &= [f^{(N-1)}(x)g(x)]_a^b - [f^{(N-2)}(x)g'(x)]_a^b + \int_a^b f^{(N-2)} g'' \\ &= \cdots \\ \int_a^b f^{(N)} g &= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k [f^{(N-k-1)}(x)g^{(k)}(x)]_a^b + (-1)^N \int_a^b f g^{(N)}. \end{aligned}$$

Pour une rédaction plus propre : procéder par récurrence sur le nombre d'intégrations par parties réalisées.

[redacted] On applique la formule précédente avec les fonctions f_n, sin, entre 0 et π. On prend $N = 2n + 1$ et on note h une fonction telle que $H^{(N)} = \sin$ (ainsi h est égal à $\pm \cos$ ou $\pm \sin$). On a donc :

$$A_n = \int_0^\pi H^{(N)}(x) f_n(x) dx$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} [H^{(N-k-1)}(x) f_n^{(k)}(x)]_0^\pi + (-1)^N \int_0^\pi H(x) f_n^{(N)}(x) dx$$

Comme $N = 2n + 1$ et que f_n est une fonction polynomiale de degré $2n$, l'intégrale de droite est nulle. De plus, on a montré que $f_n^{(k)}$ prenait des valeurs entières en 0 et π pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. Comme chaque dérivée $H^{(N-k-1)}$ vaut $\pm \cos$ ou $\pm \sin$, chacune prend aussi des valeus entières en 0 et π. Donc, les crochets sont entiers.

Finalement, $A_n \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[redacted] D'après la question précédente, A_n est entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais d'après 2.b), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0, 1[$. C'est absurde.

Donc π est irrationnel.

[redacted]