

DS 2 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- Les 3 exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Contrôle technique

1. Déterminer la valeur de $\int_4^9 \frac{\ln(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx$.

2. **Une formule avec arcsin.**

- (a) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $\sin(2 \arcsin(\sqrt{x}) - \pi/2)$ est bien définie, puis simplifier cette expression. En déduire que $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$.
- (b) Retrouver cette formule par une autre méthode.

3. **Fonction de Lambert.**

- (a) On définit une fonction f de $[-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(t) = te^t$.
Montrer que f est une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[-1/e, +\infty[$.

On note $W : [-1/e, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$ la bijection réciproque de f .

- (b) Montrer que W est dérivable sur $] -1/e, +\infty[$ et que

$$\forall x \in] -1/e, +\infty[, W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$

2 Un autre calcul de $\zeta(2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = (x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1}.$$

1. Montrer qu'il existe une application polynomiale Q_n de degré n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = Q_n(x^2).$$

2. On écrit Q_n sous la forme $Q_n = \sum_{k=0}^n q_k X^k$. Déterminer q_n et q_{n-1} .

3. Montrer que P_n admet $2n$ racines réelles distinctes.

On exprimera ces racines comme des cotangentes d'angles dans $]0, \pi[$.

4. En déduire que Q_n admet n racines réelles distinctes.

5. Montrer que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

On admet que si un polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ de degré d a d racines distinctes

$$z_1, \dots, z_d, \text{ alors } \sum_{k=1}^d z_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d}.$$

6. Montrer que $\forall x \in]0, \pi/2[, \cotan^2(x) < \frac{1}{x^2} < 1 + \cotan^2(x)$.

7. En déduire la valeur de $\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

3 π est irrationnel

Rappel de notation. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (indéfiniment dérivable) et si $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de f : $f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = (f')'$, etc.

On cherche à montrer que π est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que π s'écrit $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$.

1. **Étude des dérivées de f_n .** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

- (a) Déterminer les valeurs en 0 et en π de $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$, où $g_n : x \mapsto x^n$ et $h_n : x \mapsto (a - bx)^n$.
- (b) En déduire que $f_n^{(k)}$ prend des valeurs entières en 0 et π .
On rappelle la formule de Leibniz. Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

2. **Estimation d'une intégrale.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
- (b) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_N \in]0, 1[$.

3. **Conclusion.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des intégrations par parties successives, montrer que $A_n \in \mathbb{N}$. Conclure.

4 Problème – Intégrales impropres et transformation de Laplace

Soit I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$; soit f une continue de I dans $\mathbb{R}$. Si $\int_a^X f(t) dt$ a une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ cette limite et on dit que f admet une intégrale sur I . On note $\mathcal{R}(I)$ l'ensemble des fonctions ayant une intégrale sur I .

Si f est positive sur I , on admet que $f \in \mathcal{R}(I)$ ssi il existe $M > 0$ tel que, pour tout $X \in I$, $\int_a^X f(t) dt \leq M$.

4.1 Propriétés de $\mathcal{R}(I)$

1. Soient $f, g \in \mathcal{R}(I)$, soient λ et μ deux réels. Montrer que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(I)$ et que

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

2. Soit f une fonction continue sur $I = \mathbb{R}_+$, soit $a > 0$. On note $J = [a, +\infty[$. Montrer que $f \in \mathcal{R}(I)$ ssi $f|_J \in \mathcal{R}(J)$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

3. Pour tout $\alpha > 0$, on note f_α la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.
Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{R}(I)$ ssi $\alpha > 1$. Préciser la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ quand $\alpha > 1$.
4. Soit f une fonction continue sur $I = [a, +\infty[$ telle que $|f| \in \mathcal{R}(I)$. On cherche à montrer que $f \in \mathcal{R}(I)$.
- (a) On définit f_+ et f_- sur I par $f_+(t) = \max(0, f(t))$ et $f_-(t) = \max(0, -f(t))$.
Exprimer $|f(t)|$ et $f(t)$ en fonction de $f_+(t)$ et $f_-(t)$, pour tout t dans I .
- (b) En déduire que f_+ et f_- sont dans $\mathcal{R}(I)$, puis que $f \in \mathcal{R}(I)$.

4.2 Transformation de Laplace

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x > 0$, on note g_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g_x(t) = f(t)e^{-xt}$. On dit que f admet une transformée de Laplace si, pour tout $x > 0$, $g_x \in \mathcal{R}(I)$. Dans ce cas, on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions admettant une transformée de Laplace.

5. On note $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1. Montrer que $\mathbb{1} \in \mathcal{S}$ et calculer $\mathcal{L}(\mathbb{1})$.
6. Montrer que si f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors $f \in \mathcal{S}$.
7. Soient $x, X > 0$. Calculer $\int_0^X \sin(t)e^{-xt} dt$. En déduire que $\mathcal{L}(\sin)(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
8. **Dérivée de $\mathcal{L}(f)$.** Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = tf(t)$. On souhaite montrer que $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g)$.
- (a) Montrer que $g \in \mathcal{S}$.
- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $E(x) = \int_0^1 (1-u)e^{xu} du$.
Montrer que $0 \leq E(x) \leq e^{|x|}$ et que $e^x = 1 + x + x^2 E(x)$.
- (c) Soit $x > 0$, soit h un réel tel que $|h| < x$. Montrer que
- $$\frac{\mathcal{L}(f)(x+h) - \mathcal{L}(f)(x)}{h} + \mathcal{L}(g)(x) = h \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-xt} E(-ht) dt.$$
- (d) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est dérivable en x et que $\mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(g)(x)$.

4.3 Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On définit la fonction sinc sur $I = \mathbb{R}_+$ par $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$.

9. Montrer que sinc est continue et que $\text{sinc} \in \mathcal{S}$.
10. Montrer que $\text{sinc} \in \mathcal{R}(I)$.
On pourra utiliser une intégration par parties sur un intervalle $[1, X]$, où $X > 1$.
11. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(\text{sinc})(x) = C - \arctan x$.
12. Montrer que $\mathcal{L}(\text{sinc})(x)$ a une limite nulle en $+\infty$. En déduire la valeur de C .

On admet que $\mathcal{L}(\text{sinc})(x) \rightarrow \int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) dt$, quand $x \rightarrow 0$.

13. Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) dt$.