

# 7 - Applications, relations

Jeremy Daniel

Ich sehe es, aber ich glaube es nicht !

---

Cantor, *Lettre à Dedekind (1877)*<sup>1</sup>

I recall that when at school, at the age of about 11, I was somewhat taken aback when the teacher asked the class what a fraction (such as  $3/8$ ) actually is ! [...] I do not recall how the matter was finally resolved, but with the hindsight gained from my much later experiences as a mathematics undergraduate, I guess my schoolteacher was making a brave attempt as telling us the definition of a fraction in terms of the ubiquitous mathematical notion of an *equivalence class*.

---

R. Penrose, *The Road to Reality*

## 1 Applications entre ensembles

### 1.1 Définitions

DÉFINITION 1.1 (Application)

Une application  $f$  (ou fonction) est un triplet  $(E, F, \Gamma)$  tel que

---

1. *Je le vois, mais je ne le crois pas !*

Cantor, inventeur de la théorie des ensembles, écrit au mathématicien Dedekind une démonstration prouvant qu'il y a autant de points sur un segment que dans un carré plein, bien que ces objets géométriques n'aient pas la même *dimension*. Il est stupéfait par sa découverte contre-intuitive, qui souligne la difficulté de se représenter l'infini mathématique.

- $E$  et  $F$  sont des ensembles ;
- $\Gamma$  est une partie de  $E \times F$  ;
- La propriété suivante est satisfaite :  $\forall x \in E, \exists ! y \in F : (x, y) \in \Gamma$ .

On dit que  $E$  est l'ensemble de départ de  $f$ ,  $F$  son ensemble d'arrivée et  $\Gamma$  son graphe. On résume les ensembles de départ et d'arrivée en notant  $f : E \rightarrow F$ .

#### NOTATION 1.2

On note  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

#### DÉFINITION 1.3 (Image d'un élément)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, de graphe  $\Gamma$ . Soit  $x \in E$ . L'unique  $y \in F$  tel que  $(x, y) \in \Gamma$  est l'image de  $x$  par  $f$ , noté  $f(x)$ . On écrit encore  $f : x \mapsto f(x)$ .

#### REMARQUE 1.4

Deux applications  $f$  et  $g$  sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même image sur tous les éléments de l'espace de départ.

#### REMARQUE 1.5

En pratique, on n'aura jamais besoin d'écrire le graphe d'une application. Cependant, il arrivera que l'existence ou l'unicité dans la définition de l'image d'un élément ne soit pas évidente ; il faudra dans ce cas les démontrer.

#### DÉFINITION 1.6 (Antécédents d'un élément)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $y \in F$ .

Un antécédent de  $y$  par  $f$  est un élément  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

#### DÉFINITION 1.7 (Image directe, image réciproque)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, soient  $A \subset E, B \subset F$ .

- L'image directe de  $A$  par  $f$  est l'ensemble des éléments de  $F$  ayant au moins un antécédent par  $f$  dans  $A$  :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

- L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $f$  est dans  $B$  : (*notation provisoire*)

$$f^*(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

- L'image de  $f$  est l'image directe  $f(E)$ .

#### ATTENTION !

Ne pas confondre l'image de  $f$  et l'ensemble d'arrivée de  $f$ .

### REMARQUES 1.8

- On peut encore noter  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ . Les éléments de  $f(A)$  sont ainsi paramétrés par ceux de  $A$ , au moyen de la fonction  $f$ .
- Il est facile de donner des éléments dans  $f(A)$ , mais plus difficile de déterminer si un élément donné de  $F$  est dans  $f(A)$
- *A contrario*, il peut être difficile d'exhiber des éléments de  $f^*(B)$ . Mais, pour savoir si un élément  $x$  est dans  $f^*(B)$ , il suffit de vérifier si la condition  $f(x) \in B$  est satisfaite.

### EXERCICE 1.9

On note  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique dans  $\mathbb{R}^2$ . Écrire  $\mathcal{C}$  d'une part comme image directe par une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et d'autre part comme image réciproque d'une application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

### DÉFINITION 1.10 (Restriction, prolongement)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- Si  $A \subset E$ , la restriction de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$ , est définie de  $A$  dans  $F$  par

$$\forall x \in A, f|_A(x) = f(x).$$

- Un prolongement de  $f$  est une application  $f^+ : E' \rightarrow F$ , telle que  $E \subset E'$  et  $f = (f^+)|_E$ .

### REMARQUE 1.11

On peut aussi restreindre l'espace d'arrivée  $F$  à une partie  $B \subset F$ , à la condition que  $f(E) \subset B$ . On parle alors de co-restriction de  $f$ .

### DÉFINITION 1.12 (Application identité)

Soit  $E$  un ensemble. L'application identité de  $E$  est définie par  $\text{id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$ .

### DÉFINITION 1.13 (Composition d'applications)

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles; soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. L'application composée de  $g$  par  $f$ , notée  $g \circ f$ , est définie par

$$g \circ f : E \rightarrow G, x \mapsto g(f(x)).$$

### REMARQUES 1.14

- On peut étendre légèrement la notion de composition en autorisant l'ensemble d'arrivée de  $f$  (voire son ensemble image) à être seulement inclus dans l'ensemble de départ de  $g$ .
- Si  $f : E \rightarrow F$ ,  $f \circ \text{id}_E = \text{id}_F \circ f = f$ .
- La composition est associative :  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  si les ensembles de départ et d'arrivée sont compatibles.

## 1.2 Propriétés des images directe et réciproque

### PROPOSITION 1.15 (Image réciproque)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soient  $A, B$  des parties de  $F$ .

- $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$  ;
- $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$  ;
- $f^*(\overline{A}) = \overline{f^*(A)}$ , les complémentaires étant pris dans  $E$  et  $F$  respectivement.

### PROPOSITION 1.16 (Image directe)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soient  $A, B$  des parties de  $E$ .

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  ;
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ , l'inclusion étant stricte en général.

### PROPOSITION 1.17 (Images directe et réciproque)

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soient  $A$  une partie de  $E$ ,  $B$  une partie de  $F$ .

- $A \subset f^*(f(A))$  ;
- $f(f^*(B)) \subset B$ .

Les deux inclusions sont strictes en général.

## 1.3 Injections, surjections, bijections

### DÉFINITION 1.18

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- $f$  est injective si tout élément de  $F$  a au plus un antécédent par  $f$ .
- $f$  est surjective si tout élément a au moins un antécédent par  $f$ .
- $f$  est bijective si tout élément de  $F$  a exactement un antécédent par  $f$ .

### REMARQUES 1.19

- $f$  est bijective ssi elle est injective et surjective.
- $f$  est surjective ssi  $\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y$ . Cela revient à dire que  $f(E) = F$ .
- $f$  est injective ssi  $\forall x, x' \in E, (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$ .  
C'est la contraposée de  $\forall x, x' \in E, (x \neq x') \implies (f(x) \neq f(x'))$ .

### DÉFINITION 1.20 (Permutation)

Une permutation d'un ensemble  $E$  est une bijection de  $E$  dans lui-même.

### PROPOSITION 1.21 (Composition d'injections, de surjections)

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives/surjectives/bijjectives, alors  $g \circ f$  aussi.
- Si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
- Si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
- Si  $g \circ f$  est bijective, alors  $g$  est surjective et  $f$  est injective.

**THÉORÈME 1.22** (Bijection réciproque)

Une application  $f : E \rightarrow F$  est bijective ssi il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = \text{id}_E$  et  $f \circ g = \text{id}_F$ .

Cette application est alors unique et associe à tout  $y$  de  $F$  son unique antécédent par  $f$ .

**DÉFINITION 1.23**

L'application  $g$  ainsi définie est la bijection réciproque de  $f$ . Elle est notée  $f^{-1}$ .

**PROPOSITION 1.24**

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications bijectives. Alors

- $f^{-1}$  est bijective et  $(f^{-1})^{-1} = f$
- $g \circ f$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**PROPOSITION 1.25**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective. Soit  $B$  une partie de  $F$ . Alors  $f^*(B) = f^{-1}(B)$ .

**NOTATION 1.26**

On oublie désormais la notation  $f^*(B)$  et on note  $f^{-1}(B)$  l'image réciproque de  $B$  par  $f$ ,  $y$  compris dans le cas où  $f$  n'est pas une bijection.

## 1.4 Fonctions indicatrices

**DÉFINITION 1.27** (Fonction indicatrice)

Soit  $\Omega$  un ensemble,  $A$  une partie de  $\Omega$ . L'indicatrice de  $A$ , notée  $\mathbb{1}_A$  est l'application définie de  $\Omega$  dans  $\{0, 1\}$  par  $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**REMARQUE 1.28**

La fonction indicatrice de  $\Omega$  est la fonction constante égale à 1 ; celle de  $\emptyset$  est la fonction nulle.

**PROPOSITION 1.29**

Soient  $\Omega$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux parties de  $\Omega$ .

- $A \subset B$  ssi  $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$  ;
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$  ;
- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$  ;
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B)$ .

**THÉORÈME 1.30** (Correspondance ensembles/fonctions indicatrices)

Soit  $\Omega$  un ensemble. L'application  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow \{0, 1\}^\Omega \\ A & \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$  est une bijection.

## 1.5 Familles d'éléments

DÉFINITION 1.31 (Famille)

Soient  $E$  et  $I$  des ensembles. Une famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  est une application de  $I$  dans  $E$ .

NOTATION 1.32

Plutôt que d'utiliser une notation fonctionnelle, on préfère une notation indicée pour les familles. Si  $x$  est une famille d'éléments de  $E$ , on note  $x_i$  l'élément  $x(i)$  de  $E$ , pour tout  $i \in I$ . La famille  $x$  se note encore  $x = (x_i)_{i \in I}$ .

EXEMPLES 1.33

- Si  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ , une telle famille se note  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  ou encore  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , en utilisant l'ordre sur les entiers naturels.
- Si  $I = \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , une telle famille est une suite à valeurs réelles ou complexes.

DÉFINITION 1.34 (Union, intersection quelconques)

Soit  $\Omega$  un ensemble. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ , indexée par  $I$ . On définit

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ ;
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ .

REMARQUE 1.35

On peut généraliser les propriétés vues précédemment. Par exemple, si  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_j)_{j \in J}$  sont deux familles de parties d'un même ensemble  $\Omega$ , indexées par  $I$  et  $J$ , on a

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$$

et de même en intervertissant union et intersection.

REMARQUE 1.36

On peut aussi généraliser la définition du produit cartésien. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $\Omega$ . Le produit  $\prod_{i \in I} A_i$  est l'ensemble des familles  $(x_i)_{i \in I}$  à valeurs dans  $\Omega$ , telles que pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \in A_i$ .

L'axiome du choix affirme qu'un produit quelconque d'ensembles non vides est non vide.

## 2 Relation binaire sur un ensemble

DÉFINITION 2.1 (Relation binaire sur  $E \times F$ )

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une relation binaire  $\mathcal{R}$  de  $E$  vers  $F$  est une partie  $\Gamma$  de  $E \times F$ .

## NOTATION 2.2

Si  $x \in E$  et  $y \in F$  sont tels que  $(x, y) \in \Gamma$ , on écrit plutôt  $x \mathcal{R} y$  et on dit que  $x$  est en relation avec  $y$ .

## EXEMPLE 2.3

On a défini une application de  $E$  vers  $F$  comme une relation binaire de  $E$  vers  $F$  dont le graphe  $\Gamma$  vérifie  $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$ .

## REMARQUE 2.4

Pour la suite du chapitre, on considère uniquement le cas où  $E = F$ . On parle alors simplement de relation binaire sur  $E$ .

## DÉFINITION 2.5 (Réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie)

Une relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est

- réflexive si  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$ ;
- transitive si  $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \implies (x \mathcal{R} z)$ ;
- symétrique si  $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y) \implies (y \mathcal{R} x)$ ;
- antisymétrique si  $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x) \implies x = y$ .

## EXERCICE 2.6

Pour chacun des exemples suivants, déterminer si la relation  $\mathcal{R}$  est réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique.

- $E$  ensemble quelconque,  $x \mathcal{R} y$  ssi  $x = y$ ;
- $f : E \rightarrow F$  est une application. Sur  $E$ ,  $x \mathcal{R} y$  ssi  $f(x) = f(y)$ .
- $E = \mathbb{R}$ ,  $x \mathcal{R} y$  ssi  $x > y$ ;
- $E = \mathbb{Z}$ ,  $a \mathcal{R} b$  ssi  $a$  divise  $b$ ;
- $E = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ ,  $z \mathcal{R} w$  ssi le segment d'extrémités  $z$  et  $w$  est inclus dans  $E$ .

# 3 Relation d'équivalence

## DÉFINITION 3.1 (Relation d'équivalence)

Une relation sur  $E$  est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

## EXEMPLES 3.2

- Soit  $f : E \rightarrow F$  une application quelconque. La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $E$  par  $x \mathcal{R} y$  ssi  $f(x) = f(y)$  est une relation d'équivalence;
- Cas particulier :  $E = \mathbb{C}$ ,  $z \mathcal{R} w$  ssi  $|z| = |w|$ ;
- $E$  est l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^3$ ,  $d_1 \mathcal{R} d_2$  ssi  $d_1$  est parallèle à  $d_2$ .

## DÉFINITION 3.3 (Classe d'équivalence)

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ , soit  $x \in E$ . La classe d'équivalence de  $x$ , notée  $\text{cl}(x)$  ou  $\bar{x}$  est définie par  $\text{cl}(x) = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$ .

**DÉFINITION 3.4** (Partition d'un ensemble  $E$ )

Une partition d'un ensemble  $E$  est un ensemble  $\mathcal{P}$  de parties de  $E$  formées de parties non vides, deux à deux disjointes et d'union  $E$  :

- $\forall X \in \mathcal{P}, X \neq \emptyset$ ;
- $\forall X, Y \in \mathcal{P}, (X \neq Y) \implies X \cap Y = \emptyset$ ;
- $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X = E$ .

**THÉORÈME 3.5** (Les classes d'équivalence forment une partition de  $E$ )

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$ . Alors,  $\mathcal{P}$  est une partition de  $E$ .

**PROPOSITION 3.6** (Réciproque (HP))

Soit  $\mathcal{P}$  une partition de  $E$ . On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  par

$$x \mathcal{R} y \iff \exists X \in \mathcal{P} : (x \in X) \wedge (y \in X).$$

Alors  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . De plus, cette construction est inverse de la précédente.

**EXEMPLE 3.7**

Soit  $n \geq 1$  un entier. Dans  $E = \mathbb{Z}$ , on considère la relation de congruence modulo  $n$  :  $a \mathcal{R} b$  ssi  $n$  divise  $b - a$ . C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont les  $n$  parties  $I_k$  de  $\mathbb{Z}$ , définies pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , par :

$$I_k = k + n\mathbb{Z} = \{k + na, a \in \mathbb{Z}\}.$$

On note  $a \equiv b[n]$  quand  $a \mathcal{R} b$ .

**EXEMPLE 3.8**

Soit  $m \in \mathbb{R}_+^*$ . Dans  $E = \mathbb{R}$ , on considère la relation  $x \mathcal{R} y$  ssi  $\exists k \in \mathbb{Z}, y - x = km$ . C'est une relation d'équivalence. On note  $x \equiv y[m]$  quand  $x \mathcal{R} y$ .

Les cas les plus courants sont  $m = 2\pi$  ou  $m = \pi$  (en trigonométrie).

**DÉFINITION 3.9** (Ensemble quotient par une relation d'équivalence (HP))

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ . L'ensemble quotient  $E/\mathcal{R}$  est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$ .

**EXEMPLES 3.10**

- Si  $E = \mathbb{C}$  et  $z \mathcal{R} w$  ssi  $|z| = |w|$ , l'ensemble quotient est l'ensemble des cercles centrés en l'origine.
- Si  $E = \mathbb{Z}$  et  $a \mathcal{R} b$  ssi  $n$  divise  $b - a$  ( $n \geq 1$  fixé), l'ensemble quotient a  $n$  éléments, correspondant aux classes des entiers  $k$ , pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ . On note cet ensemble quotient

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

### REMARQUE 3.11

La notion d'ensemble quotient est très utile pour définir de nouveaux ensembles. A titre d'exemple, on montre comment définir les ensembles  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$ , en supposant connu l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels.

### EXEMPLE 3.12 (Construction de $\mathbb{Z}$ )

Sur  $\mathbb{N}^2$ , on définit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  par

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \iff a + b' = a' + b.$$

Chaque couple est dans la classe d'équivalence d'un unique couple de la forme  $(0, k)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , ou d'un unique couple  $(k, 0)$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On définit  $\mathbb{Z}$  comme l'ensemble quotient  $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$  : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la classe de  $(0, k)$  correspond à l'entier  $k \in \mathbb{Z}$ , tandis que la classe de  $(k, 0)$  correspond à l'entier  $-k \in \mathbb{Z}$ .

### EXEMPLE 3.13 (Construction de $\mathbb{Q}$ )

Sur  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ , on définit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  par

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \iff ab' = ba'.$$

L'ensemble quotient peut être identifié à  $\mathbb{Q}$  : la classe d'équivalence de  $(a, b)$  correspond à la fraction  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

### REMARQUE 3.14

Pour que ces constructions soient efficaces, il faudrait montrer comment les opérations  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{N}$  induisent des opérations analogues sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$ .

## 4 Relation d'ordre

### DÉFINITION 4.1 (Relation d'ordre (large))

Une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une relation d'ordre (large) si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre.

### DÉFINITION 4.2 (Ordre strict)

Étant donnée une relation d'ordre, notée  $\leq$ , sur un ensemble  $E$ , on note  $<$  la relation d'ordre strict induite :  $\forall x, y \in E, x < y \iff (x \leq y) \wedge (x \neq y)$ .

### EXEMPLES 4.3

- La relation  $\leq$ , définie sur  $\mathbb{R}$  ou sur l'une de ses parties, est une relation d'ordre.
- De même, pour la relation  $\geq$ .
- Mais  $<$  ou  $>$  ne sont pas des relations d'ordre (large) : elles ne sont pas réflexives.
- Si  $E$  est un ensemble, on peut considérer la relation d'inclusion  $\subset$  dans  $\mathcal{P}(E)$  : c'est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}(E)$ .

- Sur  $\mathbb{N}$ , la relation  $a \mathcal{R} b$  ssi  $a$  divise  $b$  est une relation d'ordre ; la même relation définie sur  $\mathbb{Z}$  n'est pas une relation d'ordre : elle n'est pas antisymétrique.

DÉFINITION 4.4 (Application croissante entre ensembles ordonnés)

Soient  $(E, \leq_E)$  et  $(F, \leq_F)$  deux ensembles ordonnés. Une application  $f : E \rightarrow F$  est croissante si  $\forall x, x' \in E, (x \leq_E x') \implies (f(x) \leq_F f(x'))$ .

Elle est strictement croissante si  $\forall x, x' \in E, (x <_E x') \implies (f(x) <_F f(x'))$ .

DÉFINITION 4.5 (Ordre restreint)

Si  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $E$  et si  $F$  est une partie de  $E$ , on définit une relation d'ordre  $\mathcal{R}_F$  sur  $F$  par :  $\forall x, y \in F, (x \mathcal{R}_F y) \iff (x \mathcal{R} y)$ .

DÉFINITION 4.6 (Ordre total, ordre partiel)

Une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est dite totale si  $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y) \vee (y \mathcal{R} x)$ .

L'ordre est partiel s'il n'est pas total.

REMARQUE 4.7

L'adjectif *partiel* peut aussi être utilisé pour souligner le fait que la relation d'ordre étudiée peut ne pas être totale, sans nier qu'elle le soit.

Dans la suite, on désigne par  $E$  un ensemble ordonné, l'ordre étant noté  $\leq$ .

DÉFINITION 4.8 (Élément minimal, élément maximal)

Un élément  $x$  de  $E$  est

- minimal si  $\forall y \in E, y \leq x \implies x = y$  ;
- maximal si  $\forall y \in E, x \leq y \implies x = y$ .

ATTENTION !

Si l'ordre n'est pas total, il peut y avoir plusieurs éléments minimaux distincts.

EXEMPLE 4.9

Dans l'ensemble  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ , muni de la relation de divisibilité, les éléments minimaux sont les nombres premiers et il n'y a pas d'élément maximal.

DÉFINITION 4.10 (Plus petit élément, plus grand élément)

Un élément  $x$  de  $E$  est

- le plus petit élément de  $E$  si  $\forall y \in E, x \leq y$  ;
- le plus grand élément de  $E$  si  $\forall y \in E, y \leq x$ .

REMARQUES 4.11

- L'emploi de l'article défini est justifié par l'antisymétrie de la relation d'ordre.
- Si l'ordre est total, les notions d'élément minimal (resp. maximal) et de plus petit (resp. grand) élément coïncident.

#### EXEMPLES 4.12

- L'intervalle  $[0, 1]$ , muni de la relation d'ordre  $\leq$  a pour plus petit élément 0 et pour plus grand élément 1.
- L'intervalle  $]0, 1[$  n'a ni plus petit ni plus grand élément.
- L'ensemble  $\mathbb{N}$ , muni de la relation de divisibilité a pour plus petit élément 1 et pour plus grand élément 0.

#### DÉFINITION 4.13 (Minorant, majorant)

Soit  $F$  une partie de l'ensemble ordonné  $E$ . Soit  $x$  un élément de  $E$ .

- $x$  est un minorant de  $F$  si  $\forall y \in F, x \leq y$ ;
- $x$  est un majorant de  $F$  si  $\forall y \in F, y \leq x$ .

S'il existe un minorant (resp. un majorant) de  $F$ , on dit que  $F$  est minorée (resp. majorée).

#### REMARQUE 4.14

La partie  $F$  (munie de l'ordre restreint) admet un plus petit élément ssi il existe un minorant de  $F$ , qui appartient à  $F$ .

#### EXEMPLE 4.15

Dans  $\mathbb{R}$ , l'intervalle  $]0, 1[$  admet 0 ou  $-1$  comme minorants ; 1 ou 2 comme majorants.

#### REMARQUE 4.16

Dans  $\mathbb{R}$ , toute partie majorée admet une infinité de majorants.

#### DÉFINITION 4.17 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit  $F$  une partie de  $E$ . Soit  $x \in E$ .

- $x$  est la borne inférieure de  $F$ , notée  $x = \inf(F)$ , si c'est le plus grand des minorants de  $F$  ;
- $x$  est la borne supérieure de  $F$ , notée  $x = \sup(F)$ , si c'est le plus petit des majorants de  $F$ .

#### REMARQUE 4.18

Si une partie  $F$  admet une borne supérieure, alors  $F$  est majorée. Mais la réciproque est fausse.

#### EXEMPLE 4.19

On considère  $\mathbb{N}$ , muni de la relation de divisibilité. Soient  $a, b \in \mathbb{N}$ .

- L'ensemble  $\{a, b\}$  admet une borne supérieure, égale au ppcm de  $a$  et  $b$  ;
- L'ensemble  $\{a, b\}$  admet une borne inférieure, égale au pgcd de  $a$  et  $b$ .

#### DÉFINITION 4.20 (Propriété de la borne supérieure)

On dit que l'ensemble ordonné  $E$  a la propriété de la borne supérieure si toute partie majorée de  $E$  admet une borne supérieure.

REMARQUE 4.21

On a vu précédemment que l'ensemble ordonné  $\mathbb{R}$  a la propriété de la borne supérieure.

EXERCICE 4.22

En considérant l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ , montrer que  $\mathbb{Q}$  n'a pas la propriété de la borne supérieure.