

DM 7 - Théorèmes de Cantor-Bernstein et de Knaster-Tarski

1 Théorème de Cantor-Bernstein

Soient E et F deux ensembles¹, soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux injections. On souhaite montrer que E et F sont équipotents, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de E dans F – c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*. On introduit d'abord quelques définitions :

- Un élément $x \in E$ (resp. $y \in F$) a un parent s'il a un antécédent par g (resp. par f). Un tel antécédent est nécessairement unique : on l'appellera *le parent* de x (resp. de y).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit récursivement le nombre d'ancêtres d'un élément de E ou de F :
 - Les éléments ayant 0 ancêtre sont ceux n'ayant pas de parent.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments ayant (exactement) n ancêtres sont ceux ayant un parent, et dont le parent a (exactement) $n - 1$ ancêtres.
- On dit des autres éléments qu'ils ont une infinité d'ancêtres.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n (resp. F_n) les éléments de E (resp. de F) ayant n ancêtres.
- On note E_∞ (resp. F_∞) les éléments de E (resp. de F) ayant une infinité d'ancêtres.

1. Montrer que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$ et que cette union est disjointe.

On admet le résultat analogue pour F .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(E_n) = F_{n+1}$ et que $g(F_n) = E_{n+1}$.

En déduire² que $f|_{E_n} : E_n \rightarrow F_{n+1}$ et $g|_{F_n} : F_n \rightarrow E_{n+1}$ sont des bijections.

3. Montrer que $f(E_\infty) = F_\infty$ et en déduire que $f|_{E_\infty} : E_\infty \rightarrow F_\infty$ est une bijection.

4. En déduire l'existence d'une bijection $h : E \rightarrow F$. *On fera un dessin résumant la situation.*

¹On supposera pour simplifier E et F disjoints mais le résultat est valable en général.

²On n'écrit pas explicitement les co-restrictions pour ne pas alourdir la notation.

2 Théorème de Knaster-Tarski

Un ensemble ordonné $(T, \leq)$ est un treillis si, pour tous $a, b \in T$, la partie $\{a, b\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

1. Montrer que si $(T, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné, alors c'est un treillis.
2. Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation de divisibilité est un treillis.

Un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est *complet* si toute partie A de X admet une borne supérieure³.

4. Montrer que, dans un ensemble ordonné complet, toute partie admet une borne inférieure.

En particulier, si $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné complet, c'est un treillis.

On parle aussi de *treillis complet*.

5. Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet.
6. Soit $(T, \leq)$ un treillis complet. Soit $f : T \rightarrow T$ une application croissante. On cherche à montrer que f admet un point fixe⁴, c'est-à-dire qu'il existe $x \in T$ tel que $f(x) = x$. On note $A = \{x \in T \mid x \leq f(x)\}$ et $M = \sup(A)$
 - (a) Montrer que $\forall x \in A, x \leq f(M)$. En déduire que $M \leq f(M)$.
 - (b) Montrer que $f(M) \in A$ et conclure.
7. **Une première application.** Soient $a < b$ deux réels.
 - (a) Montrer que le segment $[a, b]$, muni de l'ordre usuel, est un treillis complet.
 - (b) En déduire que toute fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.
 - (c) Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[a, b]$ par $]0, 1[$ ou par $\mathbb{R}$?

8. Une autre preuve du théorème de Cantor-Bernstein.

Soient E et F deux ensembles, soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications injectives.

- (a) On définit G de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par $\forall A \in \mathcal{P}(E), G(A) = E \setminus g(F \setminus f(A))$. Montrer que G est une application croissante pour la relation d'inclusion.
- (b) Montrer que G admet un point fixe, qu'on notera M dans la suite.
- (c) Pour tout $x \in g(F)$, on note $g^{-1}(x) \in E$ l'unique antécédent de x par g .

On définit $h : E \rightarrow F$ par $\forall x \in E, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin M. \end{cases}$

Montrer que h est une bijection de E dans F .

³En particulier, avec $A = \emptyset$, X admet un plus petit élément.

⁴Théorème de Knaster-Tarski