

Semaine 9 – Suites numériques

Les notations de Landau n'ont pas encore été formellement définies pour les suites.

1 Suites RL d'ordre 2 et arithmético-géométriques

Rappel

2 Limites de suites

- Limite finie, limite infinie, unicité de la limite
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure
- Caractérisation séquentielle de la densité
- Opérations élémentaires sur les limites ; *présentées comme des opérations dans $\bar{\mathbb{R}}$*
- Théorème de composition de limites suite/fonction (en supposant connue la notion de limite pour une fonction)
- Une suite convergente est bornée
- Passage à la limite dans les inégalités sur les suites
- Théorème d'encadrement, théorème de comparaison
- Localisation asymptotique : si (u_n) tend vers ℓ et (v_n) tend vers $\ell' > \ell$, alors à partir d'un certain rang, $v_n > u_n$.
- Fonction extractrice, suite extraite, valeur d'adhérence
- Si une suite a une limite, toutes ses suites extraites aussi
- Caractérisation des valeurs d'adhérence :
 a est v.a. de (u_n) ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| \leq \varepsilon\}$ est infini.

3 Théorèmes fondamentaux sur les suites

- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Théorème de Bolzano-Weierstrass : par lemme des pics ou par dichotomie
- Une suite bornée est convergente ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

4 Suites à valeurs complexes

- Convergence d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
- Extension des propriétés élémentaires aux suites à valeurs complexes
- Relation avec la convergence des parties réelle et imaginaire
- Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe

5 Compléments

- Théorème de Cesàro, limite finie ou infinie
- Suites de Cauchy (HP). *Non exigible ; peut donner lieu à des exercices de fin de colle*
 - Définition
 - Les suites de Cauchy sont les suites convergentes.
 - Application : si $\left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi

6 Exemples de questions de cours

- Suites arithmético-géométriques (rappel)
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (rappel)
- Définition et caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite
- Caractérisation séquentielle de la densité/de la borne supérieure
- Théorème de la limite monotone
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (démonstration au choix)
- Si une suite bornée admet une unique valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe (en admettant le théorème réel)
- Théorème de Cesàro, cas d'une limite finie