Suites numériques

Jeremy Daniel

> Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno : cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare ; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. [1]
>
> Leonardo Fibonacci, *Liber abaci* [2]

1 Limites

Les suites considérées sont à valeurs réelles.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Limite finie)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |\ell - u_n| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2
On dit aussi que (u_n) tend vers ℓ, ou qu'elle converge vers ℓ. On écrit $u_n \to \ell$.

1. Quelqu'un a déposé une paire de lapins dans un enclos entouré par un mur, afin de savoir combien de paires de lapins apparaîtraient ainsi en une année. De manière naturelle, les lapins donnèrent chaque mois naissance à une autre paire de lapins qui à son tour donna naissance dès le deuxième mois à une nouvelle paire de lapins.

2. Ou *Livre de calcul*, écrit en latin en 1202. Fibonacci y popularise notamment le système positionnel de numération, avec adoption des chiffres arabes. La suite de Fibonacci y apparait au milieu d'autres problèmes de mathématiques récréatives.

Définition 1.3 (Un raffinement)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ^+, avec $\ell \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \ell \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

De même, pour ℓ^-.

Définition 1.4 (Limite infinie)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Définition 1.5 (Voisinage d'un réel)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage (élémentaire) de a tout intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.

Définition 1.6 (Voisinage d'un infini)
On appelle voisinage (élémentaire) de $+\infty$ un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$. De même pour $-\infty$.

Remarque 1.7
Considérons $P(x)$ un prédicat, dépendant de $x \in \mathbb{R}$. On dit que u_n vérifie P, *à partir d'un certain rang* si $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, P(u_n)$.
La notion de voisinage permet d'unifier les définitions de limite. Si α désigne un réel ou un infini, la suite (u_n) a pour limite α si, pour tout voisinage V fixé de α, $u_n \in V$ à partir d'un certain rang (dépendant du voisinage).

Remarque 1.8
Une suite converge si elle a une limite finie. Elle diverge sinon. Ainsi, dans les suites divergentes, on regroupe les suites ayant une limite infinie et les suites sans limite.

Théorème 1.9 (Unicité de la limite)
Si une suite (u_n) a une limite, celle-ci est unique.

Notation 1.10
L'unicité de la limite étant connue, on peut aussi écrire $\lim u_n = \ell$. Cependant, on se méfiera des calculs avec des symboles lim, souvent écrits en présupposant que la limite existe.

Théorème 1.11 (Caractérisation séquentielle de la densité)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense ssi tout réel ℓ est limite d'une suite d'éléments de A.

Théorème 1.12 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée et non vide. Un majorant M de A est la borne supérieure de A ssi M est la limite d'une suite d'éléments de A.

1.2 Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.13 (Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$)
La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $+\infty$ et $-\infty$ désignent deux éléments non réels distincts.

Définition 1.14 (Addition dans $\overline{\mathbb{R}}$)
On prolonge l'addition de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ par les règles suivantes :

- $\forall a \in \mathbb{R}, a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}, a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$;
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Définition 1.15 (Multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}$)
On prolonge la multiplication de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ par les règles suivantes :
- $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \times (+\infty) = \operatorname{sgn}(a)\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \times (-\infty) = -\operatorname{sgn}(a)\infty$;
- $(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty) \times (-\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$.

Attention !
Dans $\overline{\mathbb{R}}$, $+$ et $\times$ ne sont pas à proprement parler des LCI puisqu'elles ne sont pas définies sur tout couple d'éléments. On retient les formes indéterminées suivantes :

- $(+\infty) + (-\infty)$;
- $(+\infty) \times 0$;
- $(-\infty) \times 0$.

Remarque 1.16
On considère que $+\infty$ et $-\infty$ sont opposés : soustraire $+\infty$, c'est ajouter $-\infty$ et vice-versa.
De même, $+\infty$ est l'inverse de 0^+ et $-\infty$ est l'inverse de 0^-.
La forme $\dfrac{1}{0}$ est indéterminée tant qu'on ne connait pas le *signe* de 0.

Définition 1.17 (Ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$)
On étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en une relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ en convenant que

$$\forall a \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty.$$

Remarque 1.18
L'ordre ainsi défini sur $\overline{\mathbb{R}}$ est total. Il admet $+\infty/-\infty$ comme plus grand/petit éléments.

1.3 Opérations sur les limites

Proposition 1.19
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, de limite respective ℓ et ℓ', dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soient a et b deux réels. Si les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont bien définies :

- *La suite $(au_n + bv_n)$ a pour limite $a\ell + b\ell'$;*
- *La suite $(u_n v_n)$ a pour limite $\ell\ell'$;*
- *La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ (si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang) a pour limite $\dfrac{\ell}{\ell'}$.*

Remarque 1.20
On rappelle les formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$, $\pm\infty \times 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$. Si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est non nul, la fraction $\dfrac{\ell}{0^+}$ vaut $\ell \times +\infty$, qui est bien défini. De même, avec 0^-.

Remarque 1.21
Une suite (u_n) tend vers 0^+ ssi elle tend vers 0 et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ à partir d'un certain rang. En termes moins cryptiques, l'"égalité" $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ correspond donc à l'énoncé : si une suite (u_n) tend vers 0 et est à valeurs strictement positives, à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ (bien définie à partir d'un certain rang) tend vers $+\infty$.

Proposition 1.22 (Composition fonction/suite)
Soit (u_n) une suite de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction telle que $f(x) \to \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, quand $x \to \ell$. Alors $f(u_n) \to \alpha$.

Corollaire 1.23
Dans l'énoncé précédent, si $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ, on a $f(u_n) \to f(\ell)$.
Autrement dit, $\lim_n f(u_n) = f\left(\lim_n u_n\right)$.

Exemples 1.24

- Si $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_n |u_n| = |\ell|$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\lim_n u_n = \ell > 0$, $\lim_n u_n^\alpha = \ell^\alpha$.

Remarque 1.25
Soient (u_n) une suite à valeurs strictement positives de limite ℓ, soit (v_n) une suite de limite ℓ' ; avec $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On s'intéresse à la limite éventuelle de $(u_n^{v_n})$. En revenant à la définition de $a^b = \exp(b \ln a)$, on peut conclure dans certains cas que $\lim_n u_n^{v_n} = \ell^{\ell'}$. Cependant, les écritures 0^0 et $1^{\pm\infty}$ sont des formes indéterminées !
Ainsi, dans le doute, quand la base et l'exposant dépendent tous les deux de n, on reviendra à la définition avec exp et ln pour étudier le comportement à l'infini.

1.4 Inégalités et limites

PROPOSITION 1.26 (Toute suite convergente est bornée.)
Toute suite convergente est bornée.

LEMME 1.27
Soit (u_n) une suite à valeurs positives de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, $\ell \geq 0$.

COROLLAIRE 1.28
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$. Si (u_n) tend vers ℓ et (v_n) tend vers ℓ', alors $\ell \geq \ell'$.

ATTENTION !
Même si les inégalités $u_n > v_n$ sont strictes, on ne peut en général affirmer qu'une inégalité large $\ell \geq \ell'$ sur les limites. Penser par exemple à $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. De plus, on *suppose* l'existence des limites.

PROPOSITION 1.29 (Théorème d'encadrement/des gendarmes)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose que (u_n) et (w_n) tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (v_n) tend vers ℓ.

REMARQUE 1.30
L'intérêt de cette proposition – par rapport au corollaire précédent – réside dans le fait que l'existence de la limite de (v_n) est une *conséquence* des hypothèses.

COROLLAIRE 1.31
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, soit ℓ un réel. On suppose que, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leq v_n$ et que (v_n) tend vers 0. Alors (u_n) tend vers ℓ.

COROLLAIRE 1.32
Soit (u_n) une suite bornée, soit (v_n) une suite de limite nulle. Alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

PROPOSITION 1.33
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

- *Si (u_n) tend vers $+\infty$, (v_n) aussi.*
- *Si (v_n) tend vers $-\infty$, (u_n) aussi.*

LEMME 1.34
Soit (u_n) de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\ell > 0$. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

REMARQUE 1.35
L'énoncé est faux avec des inégalités larges. Considérer l'exemple de $u_n = -\dfrac{1}{n}$.

Corollaire 1.36 (Localisation asymptotique)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limites ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > \ell'$. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n > v_n$.

1.5 Suites extraites

Définition 1.37 (Fonction extractrice)
Une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice si elle est strictement croissante.

Définition 1.38 (Suite extraite)
Soit (u_n) une suite. Une suite (v_n) est une suite extraite (ou une sous-suite) de (u_n) si elle est de la forme $(v_n) = (u_{\phi(n)})$, où ϕ est une extractrice.

Remarque 1.39
Si on considère les suites (u_n) et (v_n) comme des applications notées u et v de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $v = u \circ \phi$.

Remarque 1.40
La composée de deux applications strictement croissantes est strictement croissante. Ainsi, une suite extraite d'une suite extraite de (u_n) est une suite extraite de (u_n).

Exemple 1.41
Si (u_n) est une suite, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) en sont des suites extraites.
Si p_n désigne le n-ème nombre premier, la suite (u_{p_n}) est une suite extraite de (u_n).

Théorème 1.42 (Limite d'une suite extraite)
Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers ℓ.

Corollaire 1.43
Soit (u_n) une suite. On suppose qu'il existe deux suites extraites de (u_n), tendant vers des limites différentes. Alors (u_n) n'a pas de limite.

Proposition 1.44 (Réciproque très partielle)
Soit (u_n) une suite. On suppose que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors (u_n) tend vers ℓ.

Exercice 1.45
Soit (u_n) une suite, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que, pour toute suite (v_n) extraite de (u_n), il existe une suite (w_n) extraite de (v_n) telle que (w_n) tende vers ℓ. Montrer que (u_n) tend vers ℓ.

Définition 1.46 (Valeur d'adhérence - HP)
Un réel a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il est limite d'une suite extraite de (u_n).

Proposition 1.47 (Caractérisation des valeurs d'adhérences)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, soit $a \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *a est valeur d'adhérence de (u_n) ;*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| < \varepsilon\}$ est infini ;*
3. *$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : |u_n - a| < \varepsilon$.*

Exemple 1.48
La suite $(-1)^n$ a pour valeurs d'adhérence 1 et -1. Elle n'a pas de limite.

2 Théorèmes fondamentaux

Les suites considérées sont à valeurs réelles.

2.1 Suites monotones

Théorème 2.1 (Théorème de la limite monotone)
Soit (u_n) une suite croissante.

- *Si (u_n) n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.*
- *Si (u_n) est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Remarque 2.2
On peut résumer en disant que (u_n) tend toujours vers la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, en considérant cette borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.3 (Théorème des suites adjacentes)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $\lim\limits_{n}(u_n - v_n) = 0$. Alors, (u_n) et (v_n) convergent, vers la même limite.

Remarque 2.4
Les hypothèses impliquent que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Il n'y a pas besoin de le supposer.

2.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 2.5 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Soit (u_n) une suite bornée. On peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Remarque 2.6
On donne deux démonstrations de ce résultat fondamental. L'une par extraction d'une sous-suite monotone, l'autre par dichotomie.

Lemme 2.7 (Lemme des pics - HP)
De toute suite, on peut extraire une sous-suite monotone.

Remarque 2.8
En utilisant la notion de valeur d'adhérence, le théorème de Bolzano-Weierstrass peut s'énoncer : *Toute suite bornée admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Exercice 2.9
Montrer que si une suite bornée (u_n) admet une unique valeur d'adhérence, alors (u_n) tend vers cette valeur. Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas la suite bornée.

3 Relations de comparaison

Les suites considérées sont à valeurs réelles.

3.1 Notations de Landau

Définition 3.1 (Notation O)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on écrit $u_n = O(v_n)$ si

$$\exists A > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n| \leq A|v_n|.$$

Définition 3.2 (Notation o)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on écrit $u_n = o(v_n)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

Définition 3.3 (Notation $\sim$)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) et équivalente à (v_n), et on écrit $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(v_n)$.

Proposition 3.4 (Reformulation)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ *ssi il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et une suite* $(a_n)_{n \geq N}$ *bornée telle que*

$$\forall n \geq N, u_n = a_n v_n.$$

- $u_n = o(v_n)$ *ssi il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et une suite* $(\varepsilon_n)_{n \geq N}$ *de limite nulle telle que*

$$\forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

- $u_n \sim v_n$ *ssi il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et une suite* $(a_n)_{n \geq N}$ *de limite* 1 *telle que*

$$\forall n \geq N, u_n = a_n v_n.$$

Proposition 3.5 (Deuxième reformulation, avec quotient)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- *$u_n = O(v_n)$ ssi $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.*
- *$u_n = o(v_n)$ ssi $\lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.*
- *$u_n \sim v_n$ ssi $\lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*

Exemples 3.6
Soit (u_n) une suite.

- $u_n = O(1)$ ssi (u_n) est bornée.
- $u_n = o(1)$ ssi $\lim\limits_n u_n = 0$.
- $u_n \sim 1$ ssi $\lim\limits_n u_n = 1$.

Proposition 3.7 ($\sim$ est une relation d'équivalence)
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.2 Propriétés des équivalents

Proposition 3.8 (Équivalents et limites)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- *$u_n \to \ell \in \mathbb{R} \iff u_n = \ell + o(1)$; (et donc $u_n \to 0 \iff u_n = o(1)$)*
- *$u_n \to \ell \in \mathbb{R}^* \iff u_n \sim \ell$;*
- *Si $u_n \sim v_n$ et si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}, v_n \to \ell$.*

Attention !
Une suite (u_n) est équivalente à 0 ssi elle est nulle à partir d'un certain rang. En pratique, la relation $u_n \sim 0$ ne sera jamais écrite.

Proposition 3.9 (Opérations sur les équivalents)
Soient (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) des suites. On suppose $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$.

- *$u_n u'_n \sim v_n v'_n$;*
- *Si $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \sim v_n^p$;*
- *Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors (u_n) non plus et $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$;*
- *$|u_n| \sim |v_n|$;*
- *Si (v_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, alors (u_n) aussi et, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.*

Remarque 3.10
On retiendra que la relation d'équivalence des suites se comporte bien sur les opérations multiplicatives (produit, puissance, inverse, valeur absolue). En revanche, on ne peut pas en général ajouter des équivalents.

Exemple 3.11
On considère $u_n = n$, $v_n = -n+1$, $w_n = -n+\sqrt{n}$, $x_n = -n+\frac{1}{n}$. Alors, $v_n \sim w_n \sim x_n \sim -n$.
Mais $u_n + v_n \sim 1$, $u_n + w_n \sim \sqrt{n}$ et $u_n + x_n \sim \frac{1}{n}$.

Attention !
Les résultats donnés sur les puissances sont à exposant fixé. On ne peut rien dire en général de $u_n^{v_n}$, quand on dispose d'équivalents pour u_n et v_n. Dans ce cas, on revient à la définition : $u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln u_n)$.

Proposition 3.12 (Équivalents et exponentielle - HP)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On a $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ ssi $u_n = v_n + o(1)$.

Remarque 3.13
En particulier, passer de $u_n \sim v_n$ à $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ sera le plus souvent ou bien faux, ou bien vrai mais avec une grande perte de précision.

Exemple 3.14
Dire que $u_n \sim \frac{1}{n}$ est bien plus précis que dire que $e^{u_n} \sim e^{\frac{1}{n}}$, qui revient simplement à dire que e^{u_n} tend vers 1.

Exercice 3.15
Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives équivalentes, de limite 0 ou $+\infty$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Théorème 3.16 (Obtention d'équivalents)
Soit (u_n) une suite tendant vers $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors, $f(u_n) - f(a) \sim f'(a)(u_n - a)$.

Corollaire 3.17 (Équivalents usuels)
Soit (u_n) une suite tendant vers 0. On a les équivalents usuels suivants ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) :

- $\sin u_n \sim u_n$;
- $\tan u_n \sim u_n$;
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$;
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$;
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$;
- $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

3.3 Croissances comparées

Remarque 3.18
Pour alléger les notations, on écrit uniquement dans ce cours $u_n \ll v_n$, au lieu de $u_n = o(v_n)$. C'est une relation transitive sur les suites.

Théorème 3.19 (Croissances comparées)
Si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, on a :

$$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Si $\alpha, \beta > 0$ et $a < 1$, on a :

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^n \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{(\ln n)^\beta}.$$

4 Suites à valeurs complexes

Définition 4.1 (Voisinage d'un complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle voisinage (élémentaire) de z tout disque ouvert de la forme

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\},$$

où $\varepsilon > 0$.

Définition 4.2 (Limite d'une suite à valeurs complexes)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Elle a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque 4.3
Ainsi, (u_n) a pour limite z si u_n est dans tout voisinage de z, à partir d'un certain rang.

Remarque 4.4
On n'a pas de notion de limite infinie pour les suites à valeurs complexes. Si on souhaite formaliser l'idée d'une suite (u_n) à valeurs complexes qui *part à l'infini*, on peut le traduire en $\lim_n |u_n| = +\infty$.

Définition 4.5 (Valeur d'adhérence)
Un complexe z est valeur d'adhérence de $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ si z est la limite d'une suite extraite de (u_n).

Proposition 4.6 (Extension des propriétés élémentaires)
On a les propriétés suivantes :
- *Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ a une limite (finie), celle-ci est unique.*
- *Les opérations élémentaires (combinaison linéaire, produit, quotient si défini) sur les limites sont toujours valables.*
- *Si $(u_n) \in \mathbb{R}^N$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction et si $f(x) \to a$ quand $x \to \ell$, alors $f(u_n) \to a$.*
- *Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - z| \leq v_n$ et si (v_n) tend vers 0, alors (u_n) tend vers z.*

Proposition 4.7 (Partie réelle et partie imaginaire)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $u_n = x_n + iy_n$, avec $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- *(u_n) est bornée ssi (x_n) et (y_n) le sont.*
- *$u_n \to \ell \in \mathbb{C} \iff x_n \to \mathrm{Re}(\ell)$ et $y_n \to \mathrm{Im}(\ell)$.*

Proposition 4.8 (Forme trigonométrique)
Soit $(r_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $(\theta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (r_n) a pour limite r et si (θ_n) a pour limite θ, alors $(r_n e^{i\theta_n})$ a pour limite $re^{i\theta}$.

Définition 4.9 (Relations de comparaison)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs complexes.
- $u_n = O(v_n)$ si $|u_n| = O(|v_n|)$;
- $u_n = o(v_n)$ si $|u_n| = o(|v_n|)$;
- $u_n \sim v_n$ si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Théorème 4.10 (Bolzano-Weierstrass)
Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée, alors (u_n) a une valeur d'adhérence.

5 Compléments - HP

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 5.1 (Cesàro)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$. On définit $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors, $v_n \to \ell$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $u_n \to \pm\infty$, alors $v_n \to \pm\infty$.

Définition 5.2 (Suites de Cauchy)
Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^n$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Proposition 5.3
Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est bornée.

Théorème 5.4 (Complétude de $\mathbb{K}$)
Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est convergente.