Suites numériques

1 Suites et densité

EXERCICE 1. ♢ – ●◐○ *Densité de* $\cos(n)$
On admet que π est irrationnel. Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

EXERCICE 2. ♣ – ●◐○ *Densité des* $2^a 3^b$
Montrer que $\{2^a 3^b, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

2 Suites récurrentes, suites implicites

EXERCICE 3. ●◐○ *Proches de récurrences simples*

1. Déterminer le terme général de (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}$.
2. Déterminer les suites (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = n$.
3. Déterminer les suites (w_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + n + 1$.

EXERCICE 4. ♣ – ●●○ *Suites récurrentes avec racine*

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.
   Étudier la suite (u_n^2) et en déduire la nature de (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 - x - \dfrac{1}{2^n} = 0$ admet une unique solution α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour $n \geq 2$, $v_n > \alpha_n$.
   (b) En déduire les variations de (v_n) et déterminer sa limite.

EXERCICE 5. ●●○ *Récurrence et inégalités*

1. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \dfrac{u_{n+1} + u_n}{3}$.
   Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Soit (v_n) une suite réelle positive. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} \leq \alpha v_{n+2} + \beta v_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

EXERCICE 6. ♣/♢ – ●●○ *Une équation fonctionnelle*
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x > 0, f\big(f(x)\big) = 6x - f(x)$.

EXERCICE 7. ●●○ *Récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$*
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire sa limite.
2. On pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que $\lim_n (v_{n+1} - v_n) = 1$.
3. En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que $v_n \sim n$, puis que $u_n \sim \ln n$.

EXERCICE 8. ●◐○ *Suite implicite, $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$.
3. Montrer que (x_n) est décroissante, et déterminer sa limite.

EXERCICE 9. ●●○ *Suite implicite, $x + \ln x = n$*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. En déduire un équivalent de u_n.

3 Limite et asymptotique des suites

EXERCICE 10. ♣ – ●◐○ *Calcul de limites*
Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$;
2. $b_n = \sqrt[n]{n^2}$;
3. $c_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n}$;
4. $d_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$;
5. $e_n = n^2(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}})$;
6. $f_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$;
7. $g_n = \left(\frac{3^{1/n} + 7^{1/n}}{2}\right)^n$;
8. $h_n = \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^2}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor^2}$.

EXERCICE 11. ♣/♢ – ●◐○ *Calcul d'équivalents*
Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
2. $v_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n-1}}$.

EXERCICE 12. ♣/♢ – ●◐○ *Limites, avec des sommes*
Étudier la convergence des suites suivantes : $(x \in \mathbb{R})$

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;
2. $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$;
3. $w_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$;
4. $x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$;
5. $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

EXERCICE 13. ●○○ *Forme indéterminée* $1^{+\infty}$
Soit $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.
Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_n u_n = 1$, $\lim_n v_n = +\infty$ et $\lim_n u_n^{v_n} = \ell$.

EXERCICE 14. ♢ – ●◐○ $\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)$
Déterminer la limite de $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 15. ●◐○ *Équivalent de* $\sum k^\alpha$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k^\alpha \leq \int_k^{k+1} x^\alpha \, dx \leq (k+1)^\alpha$.
2. En déduire un équivalent de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

EXERCICE 16. ●◐○ *Constante d'Euler-Mascheroni*
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire l'existence d'un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

EXERCICE 17. ♣ – ●●○ *Racines itérées*

1. Soit (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2} u_n$.

(b) En déduire que (u_n) est majorée, puis qu'elle converge.

2. *Cas général.* Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On définit, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}.$$

(a) Montrer que (u_n) converge ssi $(a_n^{2^{-n}})$ est bornée.

(b) Étudier les cas $a_n = (n!)^n$ et $a_n = n^{n!}$.

4 Suites extraites, valeurs d'adhérence

EXERCICE 18. ◐○○ *Manipulation de suites extraites*
Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que si (u_n) est croissante et si (u_{2n}) converge, alors (u_n) converge.

2. Montrer que si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

EXERCICE 19. ●○○ *Suites extraites et bornes*
Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1. Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, elle admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

2. Montrer que si (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, elle admet une suite extraite bornée.

EXERCICE 20. ●●○ *Conditions de convergence, avec suites extraites*
Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose que, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, (u_{kn}) converge et que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.
   Montrer que (u_n) converge.

2. On suppose que (u_{n^2}) converge et que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.
   Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

3. On suppose que (u_{kn}) converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

EXERCICE 21. ●●○ *Restrictions sur l'ensemble des valeurs d'adhérence*

1. Soient $a < b$ deux réels.
   Montrer qu'il n'existe aucune suite réelle dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $]a, b[$.

2. Existe-t-il une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$?

EXERCICE 22. ♣/♢ – ●●○ *Valeurs d'adhérence d'une suite qui s'épuise*
Soit (u_n) une suite de réels telle que $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

EXERCICE 23. ●●○ *Limites supérieure d'une suite*
Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\limits_{p \geq n} u_p$.

1. Justifier l'existence de (v_n) et montrer que (v_n) converge.

2. Montrer que la limite α de (v_n) est une valeur d'adhérence de (u_n).
   Ceci fournit une autre preuve du théorème de Bolzano-Weiestrass.

3. Montrer que α est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
   On l'appelle limite supérieure de (u_n) *et on la note* $\overline{\lim}\, u_n$.

5 Théorème de Cesàro

EXERCICE 24. ●◐○ $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$
Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n seulement.
   En déduire que (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$. En déduire un équivalent de u_n.

EXERCICE 25. ●◐○ *Généralisation de Cesàro*
Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)_n$ tend vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Montrer que $\lim\limits_n \dfrac{\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} = \ell$.

EXERCICE 26. ●●○ *Cesàro binomial*
Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Montrer que $\lim\limits_n \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u_k = \ell$.

EXERCICE 27. ●●○ *Produit de convolution de deux suites*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers u et v. Déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

EXERCICE 28. ●●◐ *Où est Cesàro ?*
Soient $z_1, \ldots, z_p$ des nombres complexes de module 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_1^n + \cdots + z_p^n$.
On suppose que (u_n) converge. Déterminer sa limite.

6 Suites à valeurs complexes

EXERCICE 29. ◐○○ *Valeurs d'adhérence d'une suite complexe*
Donner un exemple de suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, n'ayant aucune valeur d'adhérence, mais telle que $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n)$ en aient dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 30. ●○○ *Récurrence avec le conjugué*
Déterminer les suites $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = 3z_n - \overline{z_n}$.

EXERCICE 31. ♣/♢ – ●◐○ *Géolocalisation en 2D*
Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la suite $\big(|z_n - a|\big)$ converge. Montrer que (z_n) converge.

EXERCICE 32. ●●○ *Divergence de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$
Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. Montrer que (u_n) converge ssi (v_n) converge.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent.

7 Autres exercices

EXERCICE 33. ◐○○ *Min et max de suites*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes.
Montrer que $\big(\min(u_n, v_n)\big)$ et $\big(\max(u_n, v_n)\big)$ convergent.

EXERCICE 34. ◐○○ *Suite d'entiers*
Montrer que $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge ssi elle est stationnaire.

EXERCICE 35. ♣ – ●◐○ *Des infinis toujours plus petits*
Soit (u_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$.
Montrer qu'il existe une suite de réels (v_n) tendant vers 0, telle que $(u_n v_n)$ tende vers $+\infty$.

EXERCICE 36. ●◐○ *Suites à croissance presque géométrique*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. On suppose que $\lim\limits_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
2. En déduire $\lim\limits_n \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\lim\limits_n \dbinom{2n}{n}^{1/n}$.

EXERCICE 37. ♣/♢ – ●●○ *Suite de rationnels tendant vers un irrationnel*
Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, soient $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $(\dfrac{p_n}{q_n})$ converge vers x. Montrer que

$$\lim_n |p_n| = \lim_n |q_n| = +\infty.$$

Exercice 38. ♣ – ●●◐ *Suites convexes*
Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$.

1. Montrer que (u_n) décroît.
2. Montrer que $v_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 39. ♣/♢ – ●●◐ *Suites sous-additives, lemme de Fekete*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+p} \leq x_n + x_p$. On pose $E = \left\{\dfrac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Vérifier que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq d$: $\dfrac{x_n}{n} \leq \dfrac{x_d}{d} + 2\dfrac{X_d}{n}$, où $X_d = \max\big(|x_1|, \dots, |x_d|\big)$.
2. En déduire que si E est minoré, alors $\lim\limits_{n} \dfrac{x_n}{n} = \inf(E)$.
3. Que se passe-t-il si E n'est pas minoré ?

Exercice 40. ♣ – ●●◐ *Nombre de diviseurs*
Pour tout $n \geq 1$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

1. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(d(n)\big)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $d(n) = O\big(n^{\varepsilon}\big)$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on rappelle que $H_n \sim \ln n$.

   Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d(k)$.

Indications

Exercice 1. Utiliser la périodicité de cos et la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Que dire de la suite des itérés $f^{\circ n}(x)$, pour un x fixé ? La condition $f > 0$ simplifie la question.

Exercice 11. Factoriser par le terme dominant dans les sommes.

Exercice 12. Pour 3. et 4., déterminer quels sont les termes importants.

Exercice 14. On pourra considérer la somme $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$.

Exercice 22. Utiliser la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$. Entre deux valeurs d'adhérence, la suite fait une infinité d'allers-retours, avec des sauts de plus en plus petits.

Exercice 31. La distance à trois points dans le plan détermine un point. Une autre approche consiste à d'abord montrer que (z_n) est bornée et à exploiter le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 37. Proche de x, il n'y a qu'un nombre fini de rationnels dont le dénominateur est inférieur à une borne fixée.

Exercice 39. Pour 1., utiliser une division euclidienne.