DM 10 - Fonction de Takagi

Dans ce problème, on étudie la fonction de Takagi[1], exemple de fonction continue partout, mais nulle part dérivable[2].

On pourra laisser les questions 12 et 13.

1 Construction de la fonction de Takagi

On définit g sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x-k|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit g_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{g(2^n x)}{2^n}.$$

1. Justifier que g est bien définie.
2. Donner une définition alternative de g, en utilisant la fonction partie entière.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comment le graphe de g_n est-il obtenu à partir du graphe de g ? Tracer sur un même graphique les graphes de g_0, g_1 et g_2 sur $[0,1]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est 1-périodique et 1-lipschitzienne.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que g_n est affine sur le segment $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$ et préciser les valeurs possibles de la pente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit τ_n sur $\mathbb{R}$ par $\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\tau_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On note $\tau(x)$ la limite de $\left(\tau_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. La fonction τ ainsi définie est la fonction de Takagi.

7. Bonus : écrire un programme Python affichant la graphe de τ sur $[0,1]$.

2 Autour de la continuité de τ

8. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|\tau(x) - \tau_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, τ_n est uniformément continue.

[1] Teiji Takagi (1875-1960), fondateur de l'école moderne des mathématiques japonaises. Il introduit cette fonction dans un article paru en 1903.

[2] Bolzano avait décrit une telle fonction dès 1830 mais son manuscrit a été perdu durant un siècle ; le premier exemple publié est dû à Weierstrass, en 1875.

10. En déduire que τ est uniformément continue.

11. Montrer que τ n'est pas lipschitzienne.

12. Soit $h \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\tau(x+h)-\tau(x)| \leq h\left(3+\log_2\left(\frac{1}{h}\right)\right)$.

13. Soit $\alpha \in]0,1[$. En déduire que τ est α-Hölderienne, au sens suivant :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ : \forall x, y \in \mathbb{R}, |\tau(x)-\tau(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

14. Montrer que τ est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, les trois propriétés suivantes :

    (a) $\tau(x+1) = \tau(x)$; (b) $\tau(1-x) = \tau(x)$; (c) $\tau\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\tau(x)}{2}$.

3 Non-dérivabilité de τ

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ et $b_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}$.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x < b_n$, puis montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.

16. Soient $k < n$ deux entiers. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $2^k a_n$ et $2^k b_n$ appartiennent à $[\frac{q}{2}, \frac{q+1}{2}]$.

17. En déduire que pour tous $k < n$, $g(2^k a_n) - g(2^k b_n) = \pm 2^k (a_n - b_n)$.

18. Montrer que pour tous $k \geq n$, $g(2^k a_n) - g(2^k b_n) = 0$.

19. En déduire que $\frac{\tau(b_n)-\tau(a_n)}{b_n - a_n}$ est un entier, de même parité que n.

20. Montrer que si f est une fonction dérivable en un réel x, et si (a_n) et (b_n) sont deux suites de limite x telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x < b_n$, alors[3]

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \to f'(x).$$

21. Conclure quant à la non-dérivabilité de τ en tout point.

[3]Cet énoncé étant faux quand on ne suppose pas $a_n \leq x < b_n$, il serait appréciable que cette hypothèse soit utilisée.