

## Semaine 10 - Limites de fonctions, continuité

*Peu d'exercices traités pour le moment. Les définitions de l'uniforme continuité et de la lipschitzianité ont été vues et peuvent donner lieu à des exercices en fin de colle.*

### 1 Suites numériques

Reprise du programme précédent.

### 2 Limites, continuité

- Limite d'une fonction en un point  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  adhérent à l'ensemble de définition
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Limite à gauche, limite à droite
- Résultats généraux : composition, opérations élémentaires, passage à la limite dans les inégalités, localisation asymptotique, théorèmes d'encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Continuité ponctuelle
- Continuité à gauche, continuité à droite
- Prolongement par continuité
- Opérations élémentaires
- Fonctions continues

### 3 Théorèmes fondamentaux sur la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Image d'un intervalle par une application continue
- Théorème des bornes atteintes
- Image d'un segment par une application continue
- Équivalence injectivité/stricte monotonie pour une application continue
- Théorème de la bijection
- Image d'un intervalle par une application continue strictement monotone

### 4 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

*Uniquement pour une fin de colle.*

- Continuité uniforme
- Théorème de Heine
- Fonctions lipschitziennes ; elles sont uniformément continues
- Fonction contractante
- Suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est contractante de  $I$  dans  $I$ , avec  $I$  intervalle fermé

## 5 Questions de cours

- Théorème de Cesàro
- Une suite bornée converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence
- Calcul de limites
- Un cas de théorème de la limite monotone pour les fonctions
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes