Limites de fonctions et continuité

Jeremy Daniel

> Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x, $f(x)$ und $\phi(x)$, entweder für alle Werthe von x, oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, wenn ferner $f(\alpha) < \phi(\alpha)$, und $f(\beta) > \phi(\beta)$ ist : so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $f(x) = \phi(x)$ wird.
>
> Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*

1 Limites et continuité - généralités

1.1 Limites

Définition 1.1 (Point adhérent à une partie)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que a est adhérent à A si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle)
Un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à $A \subset \mathbb{R}$ ssi il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to a$.

Remarque 1.3
En pratique, A sera le plus souvent un intervalle (non vide, non réduit à un point).
Dans ce cas, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A ssi a appartient à A ou est une borne de A.

Définition 1.4 (Limite d'une fonction)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f a pour limite ℓ en a si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}$ tel que $f(U \cap A) \subset V$.

Remarque 1.5
Il y a 9 cas à considérer, selon que a et ℓ sont finis, $-\infty$ ou $+\infty$. On se limite à a et ℓ réels ou $+\infty$.

- Si a et ℓ sont réels :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- Si a est réel et $\ell = +\infty$:
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$
- Si $a = +\infty$ et ℓ est réel :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, (x \geq M) \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- Si a et ℓ valent $+\infty$:
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in A, (x \geq N) \implies (f(x) \geq M).$$

Remarque 1.6
Comme pour les limites de suites, quand la limite de f en a est un réel ℓ, on peut préciser avec ℓ^+ ou ℓ^-. Par exemple, la limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est ℓ^+ signifie
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, (x \geq M) \implies f(x) \in [\ell, \ell + \varepsilon[.$$

Proposition 1.7 (Limite finie et borne)
Si $f : A \to \mathbb{R}$ a une limite ℓ finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Attention !
C'est une information *locale*. Le caractère borné de f – prise dans sa globalité – est inconnu.

Définition 1.8 (Limite à gauche, limite à droite)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On suppose que a est adhérent à $A \cap]-\infty, a[$. On dit que f a pour limite à gauche ℓ en a si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in A, \big(x \in [a - \varepsilon, a[\big) \implies f(x) \in V.$$
- On suppose que a est adhérent à $A \cap]a, +\infty[$. On dit que f a pour limite à droite ℓ en a si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in A, \big(x \in]a, a + \varepsilon]\big) \implies f(x) \in V.$$

Remarque 1.9
Autrement dit, f a pour limite à gauche ℓ en a ssi $f_{|A\cap]-\infty,a[}$ a pour limite ℓ en a.
De même pour la limite à droite.

Attention !
La valeur (éventuelle) de f en a n'est pas prise en compte dans la notion de limite à gauche/droite de f en a.

Théorème 1.10 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. *f a pour limite ℓ en a ;*
2. *Pour tout suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to a$, $f(u_n) \to \ell$.*

Remarque 1.11
On peut adapter dans le cas de limite à gauche/à droite. Ainsi, f a pour limite à droite ℓ en a ssi pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_n u_n = a^+$, $\lim\limits_n f(u_n) = \ell$.

Corollaire 1.12
Si $f : A \to \mathbb{R}$ a une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors cette limite est unique.
De même, pour les limites à gauche et à droite.

Remarque 1.13
Mais si f a une limite à gauche et à droite en a, celles-ci sont *a priori* distinctes, et distinctes de $f(a)$ (si défini).

Notation 1.14
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ou $f(x) \to_{x\to a} \ell$ ou $\lim\limits_a f = \ell$.
Si ℓ est la limite à gauche de f en a, on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.
De même à droite.
On note aussi $f(a^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche/à droite de f en a.

Proposition 1.15 (Limite en un point de définition de f)
Si $f : A \to \mathbb{R}$ est définie en a et si f a une limite en a, alors cette limite est $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Proposition 1.16 (Composition de limites, fonction/fonction)
Soient $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. On suppose $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A.
Si $\lim\limits_a f = \ell$ existe, alors ℓ est adhérent à B et, si $\lim\limits_\ell g$ existe,

$$\lim_a (g \circ f) = \lim_\ell g.$$

1.2 Extension des résultats sur les suites

Proposition 1.17 (Opérations sur les limites)
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ *deux fonctions, soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On suppose $\lim\limits_a f = \ell$ *et* $\lim\limits_a g = \ell'$. *Si les opérations sont bien définies :*

- $\lim\limits_a (\alpha f + \beta g) = \alpha\ell + \beta\ell'$;
- $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$;
- $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$, *(si* g *ne s'annule pas sur un voisinage de* a*).*

Proposition 1.18 (Passage à la limite)
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$, *soit* a *adhérent à* A. *Si dans un voisinage de* a, $f \geq g$, *et si les limites existent, alors* $\lim\limits_a f \geq \lim\limits_a g$.

Proposition 1.19 (Localisation asymptotique)
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$, *soit* a *adhérent à* A.
Si $\lim\limits_a f$ *et* $\lim\limits_a g$ *existent et que* $\lim\limits_a f > \lim\limits_a g$ *alors, dans un voisinage de* a, $f(x) > g(x)$.

Proposition 1.20 (Théorème d'encadrement)
Soient $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, *soit* a *adhérent à* A.
Si dans un voisinage de a, $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim\limits_a f$ *et* $\lim\limits_a h$ *existent et sont égales, alors* $\lim\limits_a g$ *existe et* $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = \lim\limits_a h$.

Proposition 1.21
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$, *soit* a *adhérent à* A. *On suppose que dans un voisinage de* a, $f \leq g$.

- *Si* $\lim\limits_a f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_a g = +\infty$.
- *Si* $\lim\limits_a g = -\infty$, *alors* $\lim\limits_a f = -\infty$.

Théorème 1.22 (Limite monotone - point intérieur)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. Soit* $a \in I$, *un point distinct des bornes de* I.
Alors f *admet des limites à gauche et à droite de* a. *De plus,* $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$,

$$f(a^-) = \sup\{f(x), x \in I, x < a\} \text{ et } f(a^+) = \inf\{f(x), x \in I, x > a\}.$$

Théorème 1.23 (Limite monotone - autre cas)
Soit f *une fonction croissante sur un intervalle* I, *soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Si* $a = \sup I$ *et* $a \in I$, $f(a^-)$ *existe et*

$$f(a^-) = \sup\{f(x), x \in I, x < a\} \leq f(a).$$

- *Si* $a = \sup I$ *et* $a \notin I$, $f(a^-)$ *existe et*

$$f(a^-) = \sup\{f(x), x \in I, x < a\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

- *Si* $a = \inf I$ *et* $a \in I$, $f(a^+)$ *existe et*

$$f(a^+) = \inf\{f(x), x \in I, x > a\} \geq f(a).$$

- *Si* $a = \inf I$ *et* $a \notin I$, $f(a^+)$ *existe et*

$$f(a^+) = \inf\{f(x), x \in I, x > a\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Remarque 1.24
On dispose d'énoncés analogues si f est décroissante.

1.3 Continuité en un point

Définition 1.25 (Continuité)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remarque 1.26
Cela revient à demander que f admet une limite en a.

Attention !
Il n'y a pas de sens à parler de continuité de f en a, si f n'est pas définie en a.

Définition 1.27 (Continuité à gauche/à droite)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in A$ tel que a est adhérent à $A \cap]-\infty, a[$.
On dit que f est continue à gauche en a si $f(a^-)$ existe et vaut $f(a)$.
De même pour la continuité à droite.

Remarque 1.28
Si f est définie sur un intervalle I et si $a \in I$, il y a trois cas à considérer :
- Si $a = \sup I$, f est continue en a ssi f est continue à gauche en a ssi $f(a^-) = f(a)$.
- Si $a = \inf I$, f est continue en a ssi f est continue à droite en a ssi $f(a^+) = f(a)$.
- Sinon, f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a ssi

$$f(a^-) = f(a) = f(a^+).$$

Définition 1.29 (Prolongement par continuité)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, soit $a \notin A$ un réel adhérent à A.
On dit que f admet un prolongement par continuité en a si f a une limite finie en a.

Remarque 1.30
Dans cette situation, on étend f en $\bar{f} : A \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, en définissant $\bar{f}(a)$ comme la limite $\lim_{x \to a} f(x)$. Alors, $\bar{f}$ est continue en a, par construction.
Souvent, on gardera la même notation pour f et $\overline{f}$.

Proposition 1.31 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, soit $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- *f est continue en a ;*
- *Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n u_n = a$, $\lim_n f(u_n) = f(a)$.*

Remarque 1.32
On peut adapter à la continuité à gauche et à droite.

Proposition 1.33 (Opérations élémentaires sur la continuité)
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a \in A$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Alors, $\alpha f + \beta g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.

Proposition 1.34 (Composition et continuité)
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ telles que $f(A) \subset B$. Soient $a \in A$, $b = f(a)$. On suppose f continue en a et g continue en b.
Alors, $g \circ f$ est continue en a.

1.4 Fonctions continues

Définition 1.35 (Fonction continue)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A.

Notation 1.36
On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.37 (Opérations sur les fonctions continues)
Quand les opérations sont bien définies, une combinaison linéaire/un produit/un quotient/une composition de fonctions continues est une fonction continue.

Proposition 1.38 (Continuité des fonctions usuelles)
Les fonctions suivantes sont continues :
- *$x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$;*
- *les applications polynomiales sur $\mathbb{R}$;*
- *les fractions rationnelles $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$;*

- *la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
- *la fonction* $\exp$ *sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *les fonctions puissances* $x \mapsto x^\alpha$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(sur* $\mathbb{R}_+$ *si* $\alpha \geq 0$*)*
- *les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *la fonction* $\tan$ *sur* $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *;*
- *les fonctions hyperboliques* ch, sh, th *sur* $\mathbb{R}$
- *les fonctions trigonométriques réciproques* Arccos, Arcsin, Arctan
- *Les fonctions hyperboliques réciproques* argch, argsh, argth.

Remarque 1.39
Les deux derniers résultats sont suffisants pour montrer la continuité de nombreuses fonctions *concrètes.*
On se contentera d'une phrase du type *Par les théorèmes généraux, f est continue.*

2 Théorèmes fondamentaux sur la continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ dans I tels que $f(a)f(b) \leq 0$.
Alors, $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Corollaire 2.2
Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ dans I et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$
Alors, $\exists x \in [a, b] : f(x) = y$.

Corollaire 2.3 (Image d'un intervalle par une fonction continue)
Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors, $f(I)$ est un intervalle.

Attention !
En général, les propriétés (fini/infini ; ouvert/fermé/semi-ouvert) de l'intervalle ne sont pas préservées.

Exercice 2.4
Donner des exemples de f continues sur I telles que :

- $I = \mathbb{R}$ et $f(I) = \mathbb{R}_+^*$;
- $I = \mathbb{R}$ et $f(I) = [-1, 1]$;
- $I = \mathbb{R}_+$ et $f(I) = [-1, 1]$;
- $I = \mathbb{R}_+$ et $f(I) = \mathbb{R}$;
- $I =]0, 1[$ et $f(I) = \mathbb{R}_+$.

Proposition 2.5 (TVI, avec limites aux bornes - HP)
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Soit $I =]a, b[$ et soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $\lim_a f = \ell_1$

et $\lim_b f = \ell_2$.
Pour tout y *compris strictement entre* ℓ_1 *et* ℓ_2*, il existe* $x \in I$ *tel que* $f(x) = y$.

COROLLAIRE 2.6 (Application polynomiale de degré impair)
Toute application polynomiale de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème des bornes atteintes

DÉFINITION 2.7 (Segment dans $\mathbb{R}$)
Un segment (non trivial) est un intervalle $[a, b]$, où $a < b$ sont deux réels.

THÉORÈME 2.8 (Théorème des bornes atteintes)
Soit I *un segment, soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*. Alors,* f *est bornée et atteint ses bornes.*

REMARQUE 2.9
Autrement dit, l'ensemble $\{f(x), x \in I\}$ admet un plus petit et un plus grand élément.

COROLLAIRE 2.10 (Image d'un segment par une application continue)
Soit I *un segment, soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*. On note* m *et* M *le minimum et le maximum de* $\{f(x), x \in I\}$*. Alors,* $f(I) = [m, M]$*.*
En particulier, l'image d'un segment par une application continue est un segment.

EXERCICE 2.11
Soit f une fonction strictement positive et continue sur un segment I. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f \geq a$ sur I.
Montrer que le résultat est faux en général si I est un intervalle quelconque.

2.3 Théorème de la bijection

PROPOSITION 2.12 (Injectivité et stricte monotonie pour les fonctions continues)
Soit I *un intervalle, soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*. Alors,* f *est injective ssi* f *est strictement monotone.*

ATTENTION !
L'implication injectivité $\Longrightarrow$ stricte monotonie est fausse si I n'est pas un intervalle. Penser à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

THÉORÈME 2.13 (Théorème de la bijection)
Soit I *un intervalle, soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*. On suppose* f *strictement monotone. Alors,*
1. $J = f(I)$ *est un intervalle ;*
2. $f : I \to J$ *est une bijection ;*
3. $f^{-1} : J \to I$ *est continue et strictement monotone, de même monotonie que* f*.*

Corollaire 2.14 (Image de I)
Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une application strictement croissante. On note $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Alors,
- *Si $a, b \in I$, $f(I) = [f(a), f(b)]$;*
- *Si $a \in I$ et $b \notin I$, $f(I) = [f(a), f(b^-)[$;*
- *Si $a \notin I$ et $b \in I$, $f(I) =]f(a^+), f(b)]$;*
- *Si $a, b \notin I$, $f(I) =]f(a^+), f(b^-)[$.*

Remarque 2.15
On a des énoncés analogues si f est strictement décroissante.

3 Uniforme continuité, lipschitzianité

3.1 Fonctions uniformément continues

Définition 3.1 (Fonction uniformément continue)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.2
La différence avec la continuité vient de ce que δ doit être choisi uniquement en fonction de ε, et donc indépendamment de x et y dans A. En particulier, les fonctions uniformément continues sont continues.

Remarque 3.3
La notion d'uniforme continuité est globale : parler d'uniforme continuité en un point n'a pas de sens.

Exercice 3.4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
1. Montrer que $f_{|[0,t]}$ est uniformément continue, pour tout $t > 0$.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}_+}$ n'est pas uniformément continue.

Théorème 3.5 (Théorème de Heine)
Soit I un segment, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors, f est uniformément continue.

3.2 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.6 (Fonctions K-lipschitziennes)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, soit $K > 0$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Une fonction est lipschitzienne si elle est K-lipschitzienne pour un $K \geq 0$.

Remarque 3.7
Cela revient à demander que, dans la définition de l'uniforme continuité, δ *ait une dépendance linéaire en* ε.

Remarque 3.8
Considérons $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne et fixons $x \in A$. Alors, le graphe de f est contenu dans le cône centré en le point $(x, f(x))$ et de pentes $\pm K$.
Réciproquement, si f vérifie cette condition pour tout x de A, alors f est K-lipschitzienne.

Proposition 3.9
Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exemples 3.10
- Montrer que $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment $[0, t]$, où $t > 0$.
  Préciser la constante $K(t)$ optimale.
- Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est lipschitzienne sur aucun segment $[0, t]$, où $t > 0$.

Définition 3.11 (Fonction contractante)
Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est contractante si elle est K-lipschitzienne, pour une constante $K \in [0, 1[$.

Attention !
C'est une propriété plus forte que de demander $\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Proposition 3.12 (Suite récurrente définie par une application contractante)
Soit I un intervalle fermé. Soit $f : I \to I$ une application contractante.
Alors, f a un unique point fixe c. De plus, si (u_n) est une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors $\lim\limits_n u_n = c$.

4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 4.1 (Limite)
Soit $f : A \to \mathbb{C}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A.
On dit que f a pour limite $z \in \mathbb{C}$ en a si pour tout voisinage V de z, il existe un voisinage U de a tel que $f(A \cap U) \subset V$.

Proposition 4.2 (Caractérisation)
Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes
1. *f a pour limite z en a ;*
2. *$\operatorname{Re} f$ a pour limite $\operatorname{Re} z$ en a et $\operatorname{Im} f$ a pour limite $\operatorname{Im} z$ en a ;*
3. *Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_n u_n = a$, $\lim\limits_n f(u_n) = z$.*

Remarque 4.3
On définit, comme précédemment, la continuité (à gauche/à droite) en a d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 4.4 (Continuité)
Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est continue si elle est continue en tout point de A.

Remarque 4.5
C'est équivalent à demander que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient continues.

Proposition 4.6 (Opérations)
On étend les résultats généraux de limite/continuité ponctuelle/continuité globale aux fonctions à valeurs complexes.

Proposition 4.7 (Module d'une fonction)
Si $f : A \to \mathbb{C}$ a pour limite ℓ en a, alors $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en a.
Si $f : A \to \mathbb{C}$ est continue, alors $|f|$ aussi.

Attention !
Les résultats sur les limites utilisant l'ordre sur $\mathbb{R}$ n'ont *a priori* pas de sens pour les fonctions à valeurs complexes. On pourra au besoin traduire les propriétés souhaitées en travaillant sur la partie réelle, la partie imaginaire ou le module.

Remarque 4.8
Le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes et le théorème de la bijection n'ont pas d'analogue immédiat pour les fonctions à valeurs complexes.

Remarque 4.9
On peut définir sans changement l'uniforme continuité et la K-lipschitzianité de fonctions à valeurs complexes. Le théorème de Heine et les implications *lipschitzianité* $\implies$ *uniforme continuité* $\implies$ *continuité* restent valables.

Remarque 4.10
On pourrait sans difficulté définir les notions de limite et de continuité pour des fonctions *définies* sur une partie de $\mathbb{C}$. Ceci sera fait en deuxième année, dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés.