

Limites, continuité

1 Continuité ponctuelle

EXERCICE 1. ●○○ *Prolongements par continuité*

Déterminer l'ensemble de définition et discuter des prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-1/x^2}$;

3. $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$;

2. $x \mapsto \frac{x \ln x}{x - 1}$;

4. $x \mapsto \sin(x) \sin(1/x)$.

EXERCICE 2. ●○○ *Avec partie entière*

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$;

2. $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$;

3. $x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

EXERCICE 3. ◇ – ●●○○ *Des équations fonctionnelles*

1. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(xy) = f(x) + f(y).$$

3. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues en 0 et en 1, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

EXERCICE 4. ●○○ *Limites en 0 de f et $f \circ \sin$*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = \ell$.

EXERCICE 5. ♣ – ●●○○ *$f(Ax) \leq Bf(x)$*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que f est continue en 0 et telle que :

$$\exists A > 1, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(Ax) \leq Bf(x).$$

Montrer que f est bornée sur tout intervalle borné.

EXERCICE 6. $\diamond - \bullet \bullet \circ$ *Monotonies et continuité*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

EXERCICE 7. $\bullet \bullet \circ$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

EXERCICE 8. $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$ *Fonction à croissance lente*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

EXERCICE 9. $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$ *Suite lente dont le cosinus tend vers 0*

Soit (u_n) une suite telle que $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim_n \cos(u_n) = 0$. Montrer que (u_n) converge.

EXERCICE 10. $\diamond - \bullet \bullet \circ$ *Discontinuités d'une fonction monotone*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. On note D l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ tels que f n'est pas continue en a . Montrer que D est dénombrable.

EXERCICE 11. $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$ *Fonction de Thomae*

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

- $f(x) = 0$ si x est irrationnel ;
- $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux et $q > 0$.

Déterminer les points de continuité de f .

2 Fonctions continues sur un intervalle

EXERCICE 12. $\bullet \circ \circ$ *Fonction continue à valeurs entières*

Montrer que si f est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{Z} , alors f est constante.

EXERCICE 13. $\bullet \circ \circ$ *Nombre d'annulations d'une fonction*

Donner des exemples de fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ telles que :

1. f s'annule une unique fois sur $[0, 1]$;
2. f s'annule exactement deux fois sur $[0, 1]$;
3. f s'annule une infinité de fois sur $[0, 1]$ mais n'est nulle sur aucune intervalle non trivial.

EXERCICE 14. $\clubsuit / \diamond - \bullet \circ \circ$ *Généralisation du théorème des bornes atteintes*

Soit f une application continue sur \mathbb{R} . On suppose que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

EXERCICE 15. $\bullet \bullet \circ$ *Même limite aux bornes*

Soit f une application continue sur $]a, b[$ telle que $\lim_a f = \lim_b f$. Montrer que f n'est pas injective.

EXERCICE 16. ●●○ Fonction définie avec un sup

Soit f une application continue sur $[0, 1]$.

Montrer que $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \sup_{0 \leq t \leq x} f(t)$ est bien définie, croissante et continue.

EXERCICE 17. ●●○ Limite de $\frac{f(x)}{x}$ et point fixe

Soit f une application continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$.

Montrer que f admet un point fixe.

EXERCICE 18. ♣ – ●●○ Vitesses moyennes

Une distance de 10 km a été courue en 40 minutes.

1. Montrer qu'il existe une portion de 5 km courue en 20 minutes.
2. Formaliser et généraliser.

EXERCICE 19. ●●○ Surjection continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une surjection continue.

Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f .

EXERCICE 20. ●●○ Ensemble des périodes d'une application continue

Soit f une application continue sur \mathbb{R} . On note \mathcal{T} l'ensemble de ses périodes :

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}.$$

1. Montrer que \mathcal{T} est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .
2. Montrer que si (t_n) est une suite convergente d'éléments de \mathcal{T} , alors sa limite est dans \mathcal{T} .
3. On suppose f non constante et $\mathcal{T} \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $\mathcal{T} = a\mathbb{Z}$.
4. Que dire d'une fonction continue de périodes 1 et $\sqrt{2}$?

EXERCICE 21. ♣/◇ – ●●○ Extrema locaux d'une fonction

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note E l'ensemble des réels x tels que f admette un extremum local en f .

1. Montrer que $f(E)$ est dénombrable.
2. Déterminer les fonctions continues sur \mathbb{R} admettant un extremum local en tout point.

EXERCICE 22. ●●○ Fonction discontinue et théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que la fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

n'est pas continue mais vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

EXERCICE 23. ♣/◇ – ●●○ Deux points à écart fixé prenant même valeur

Soit f une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , il existe x_n dans $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.
2. Y a-t-il un résultat analogue si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel α dans $[0, 1]$?

EXERCICE 24. ●●○ $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$

Déterminer les applications f continues telles que $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 25. ●●○ Au maximum deux antécédents

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que tout réel a au plus deux antécédents par f .

Montrer qu'il existe un réel n'ayant qu'un seul antécédent.

EXERCICE 26. ●●○ Discrétisation d'une fonction

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la convergence de la suite $\left(\max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$.

EXERCICE 27. ♣ – ●●● Ouverts et fermés de \mathbb{R}

Une partie U de \mathbb{R} est ouverte si $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 : [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset U$.

Une partie F de \mathbb{R} est fermée si, pour toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de limite ℓ , $\ell \in F$.

1. Montrer que U est ouvert ssi $\mathbb{R} - U$ est fermé.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
 - (a) f est continue.
 - (b) Pour tout ouvert U , $f^{-1}(U)$ est ouvert.
 - (c) Pour tout fermé F , $f^{-1}(F)$ est fermé.

3 Uniforme continuité, lipschitzianité

EXERCICE 28. ●○○ Approximation de $\sqrt{2}$

Soit f l'application définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

1. Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$, que $\sqrt{2}$ est point fixe de f et que f est contractante.
2. En déduire quelques décimales de $\sqrt{2}$.

EXERCICE 29. ●○○ Conditions d'uniforme continuité

Soit f une application continue sur \mathbb{R} . Montrer que f est uniformément continue si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. f a une période $T > 0$;
2. f admet des limites finies en $\pm\infty$.

L'une de ces deux conditions implique-t-elle que f est lipschitzienne ?

EXERCICE 30. ♣ – ●●○ *Limite sur les entiers ou sur les réels*

Soit f une application uniformément continue sur \mathbb{R} . On suppose que $\lim_n f(n) = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$).
Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 31. ●●○ *Continuité uniforme du logarithme*

Montrer que \ln n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+^* mais qu'elle est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

EXERCICE 32. ♣/◇ – ●●○ *Fonction lipschitzienne avec un sup*

Soient f et g deux applications continues sur $[0, 1]$. Soit ϕ l'application définie sur \mathbb{R} par :

$$\phi(x) = \sup_{t \in [0, 1]} (f(t) + xg(t)).$$

Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est lipschitzienne.

EXERCICE 33. ◇ – ●●○ *Borne affine d'une fonction uniformément continue*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq ax + b.$$

EXERCICE 34. ♣ – ●●○ *Somme alternée des valeurs de f*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

Indications

Exercice 3. Pour 1., comment passer de \mathbb{Q} à \mathbb{R} ? Pour 2., se ramener à 1. plutôt que refaire le raisonnement. Pour 3., f doit être constante sur l'ensemble des valeurs de toute suite (x^{2^n}) ou $(x^{2^{-n}})$.

Exercice 6. Ne pas oublier le théorème de la limite monotone, pour les fonctions.

Exercice 8. L'hypothèse sur la limite implique que si x est suffisamment grand, le numérateur $f(x)$ croît au plus en εx , où $\varepsilon > 0$ est fixé. Où intervient l'hypothèse de croissance ?

Exercice 10. En un point de discontinuité d'une fonction monotone f , f fait un saut. Comment étiqueter ces sauts par un rationnel ?

Exercice 14. Il faut se ramener au comportement de f sur un segment. Attention ! il faut s'assurer que f prend des valeurs plus grandes, hors du segment.

Exercice 21. Se demander pourquoi il n'existe pas nécessairement d'injection de E dans \mathbb{Q} . Ensuite, pour construire l'injection, associer à $y \in f(E)$ un rationnel *proche* d'un antécédent de y .

Exercice 23. Pour 1., on cherche à appliquer un TVI à $g : x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$, mais sur quel intervalle ? Pour 2., pour construire un contre-exemple, considérer une déformation d'une fonction α -périodique.

Exercice 32. Pour manipuler les sup, il est plus agréable d'écrire des inégalités valables pour tout t et de passer au sup ensuite.

Exercice 33. Se ramener au comportement sur un segment par des petits sauts.