

## Limites, continuité

### 1 Continuité ponctuelle

**EXERCICE 1.** ●○○ *Prolongements par continuité*

Déterminer l'ensemble de définition et discuter des prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto e^{-1/x^2}$  ;
2.  $x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1}$  ;
3.  $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$  ;
4.  $x \mapsto \sin(x) \sin(1/x)$  .

**EXERCICE 2.** ●○○ *Avec partie entière*

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  ;
2.  $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  ;
3.  $x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ .

**EXERCICE 3.** ♦ – ●○○ *Des équations fonctionnelles*

1. Déterminer les applications continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer les applications continues  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(xy) = f(x) + f(y).$$

3. Déterminer les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues en 0 et en 1, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

**EXERCICE 4.** ●○○ *Limites en 0 de  $f$  et  $f \circ \sin$*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = \ell$ .

**EXERCICE 5.** ♣ – ●○○  *$f(Ax) \leq Bf(x)$*

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f$  est continue en 0 et telle que :

$$\exists A > 1, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(Ax) \leq Bf(x).$$

Montrer que  $f$  est bornée sur tout intervalle borné.

**EXERCICE 6.** ♦ – ●○○ *Monotonies et continuité*

Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante.  
Montrer que  $f$  est continue.

**EXERCICE 7.** ●○○  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**EXERCICE 8.** ♣/♦ – ●●○ *Fonction à croissance lente*

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**EXERCICE 9.** ♣ – ●●○ *Suite lente dont le cosinus tend vers 0*

Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$  et  $\lim_n \cos(u_n) = 0$ . Montrer que  $(u_n)$  converge.

**EXERCICE 10.** ♦ – ●●○ *Discontinuités d'une fonction monotone*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. On note  $D$  l'ensemble des points  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $f$  n'est pas continue en  $a$ . Montrer que  $D$  est dénombrable

**EXERCICE 11.** ♣ – ●●○ *Fonction de Thomae*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

- $f(x) = 0$  si  $x$  est irrationnel ;
- $f(x) = \frac{1}{q}$  si  $x = \frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux et  $q > 0$ .

Déterminer les points de continuité de  $f$ .

## 2 Fonctions continues sur un intervalle

**EXERCICE 12.** ○○○ *Fonction continue à valeurs entières*

Montrer que si  $f$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{Z}$ , alors  $f$  est constante.

**EXERCICE 13.** ●○○ *Nombre d'annulations d'une fonction*

Donner des exemples de fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, avec  $f(0) < 0$  et  $f(1) > 0$  telles que :

1.  $f$  s'annule une unique fois sur  $[0, 1]$  ;
2.  $f$  s'annule exactement deux fois sur  $[0, 1]$  ;
3.  $f$  s'annule une infinité de fois sur  $[0, 1]$  mais n'est nulle sur aucune intervalle non trivial.

**EXERCICE 14.** ♣/♦ – ●○○ *Généralisation du théorème des bornes atteintes*

Soit  $f$  une application continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ .

Montrer que  $f$  est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

**EXERCICE 15.** ●○○ *Même limite aux bornes*

Soit  $f$  une application continue sur  $]a, b[$  telle que  $\lim_a f = \lim_b f$ . Montrer que  $f$  n'est pas injective.

**EXERCICE 16.** ●○○ *Fonction définie avec un sup*

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ .

Montrer que  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $g(x) = \sup_{0 \leq t \leq x} f(t)$  est bien définie, croissante et continue.

**EXERCICE 17.** ●○○ *Limite de  $\frac{f(x)}{x}$  et point fixe*

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$ .

Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**EXERCICE 18.** ♣ – ●○○ *Vitesses moyennes*

Une distance de 10 km a été courue en 40 minutes.

1. Montrer qu'il existe une portion de 5 km courue en 20 minutes.
2. Formaliser et généraliser.

**EXERCICE 19.** ●○○ *Surjection continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$* 

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une surjection continue.

Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par  $f$ .

**EXERCICE 20.** ●○○ *Ensemble des périodes d'une application continue*

Soit  $f$  une application continue sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble de ses périodes :

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que si  $(t_n)$  est une suite convergente d'éléments de  $\mathcal{T}$ , alors sa limite est dans  $\mathcal{T}$ .
3. On suppose  $f$  non constante et  $\mathcal{T} \neq \{0\}$ . Montrer qu'il existe un unique  $a > 0$  tel que  $\mathcal{T} = a\mathbb{Z}$ .
4. Que dire d'une fonction continue de périodes 1 et  $\sqrt{2}$  ?

**EXERCICE 21.** ♣/◊ – ●○○ *Extrema locaux d'une fonction*

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $E$  l'ensemble des réels  $x$  tels que  $f$  admette un extremum local en  $f$ .

1. Montrer que  $f(E)$  est dénombrable.
2. Déterminer les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  admettant un extremum local en tout point.

**EXERCICE 22.** ●○○ *Fonction discontinue et théorème des valeurs intermédiaires*

Montrer que la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

n'est pas continue mais vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

**EXERCICE 23.** ♣/◊ – ●●○ *Deux points à écart fixé prenant même valeur*  
Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , il existe  $x_n$  dans  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  tel que  $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ .
2. Y a-t-il un résultat analogue si on remplace  $\frac{1}{n}$  par un réel  $\alpha$  dans  $[0, 1]$  ?

**EXERCICE 24.** ●●○  $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$

Déterminer les applications  $f$  continues telles que  $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**EXERCICE 25.** ●●○ *Au maximum deux antécédents*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que tout réel a au plus deux antécédents par  $f$ .  
Montrer qu'il existe un réel n'ayant qu'un seul antécédent.

**EXERCICE 26.** ●●○ *Discrétisation d'une fonction*

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Étudier la convergence de la suite  $\left(\max_{k \in [0, n]} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ .

**EXERCICE 27.** ♣ – ●●○ *Ouverts et fermés de  $\mathbb{R}$*

Une partie  $U$  de  $\mathbb{R}$  est ouverte si  $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 : [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset U$ .

Une partie  $F$  de  $\mathbb{R}$  est fermée si, pour tout suite  $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$  de limite  $\ell$ ,  $\ell \in F$ .

1. Montrer que  $U$  est ouvert ssi  $\mathbb{R} - U$  est fermé.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
  - (a)  $f$  est continue.
  - (b) Pour tout ouvert  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  est ouvert.
  - (c) Pour tout fermé  $F$ ,  $f^{-1}(F)$  est fermé.

### 3 Uniforme continuité, lipschitzianité

**EXERCICE 28.** ○○○ *Approximation de  $\sqrt{2}$*

Soit  $f$  l'application définie sur  $[1, 2]$  par  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

1. Montrer que  $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ , que  $\sqrt{2}$  est point fixe de  $f$  et que  $f$  est contractante.
2. En déduire quelques décimales de  $\sqrt{2}$ .

**EXERCICE 29.** ●○○ *Conditions d'uniforme continuité*

Soit  $f$  une application continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1.  $f$  a une période  $T > 0$  ;
2.  $f$  admet des limites finies en  $\pm\infty$ .

L'une de ces deux conditions implique-t-elle que  $f$  est lipschitzienne ?

**EXERCICE 30.** ♣ – ●○○ *Limite sur les entiers ou sur les réels*

Soit  $f$  une application uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\lim_n f(n) = +\infty$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**EXERCICE 31.** ●○○ *Continuité uniforme du logarithme*

Montrer que  $\ln$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  mais qu'elle est uniformément continue sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ , où  $a > 0$ .

**EXERCICE 32.** ♣/◊ – ●○○ *Fonction lipschitzienne avec un sup*

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $[0, 1]$ . Soit  $\phi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\phi(x) = \sup_{t \in [0, 1]} (f(t) + xg(t)).$$

Montrer que  $\phi$  est bien définie et que  $\phi$  est lipschitzienne.

**EXERCICE 33.** ◊ – ●●○ *Borne affine d'une fonction uniformément continue*

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq ax + b.$$

**EXERCICE 34.** ♣ – ●●○ *Somme alternée des valeurs de  $f$* 

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que  $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ .

## Indications

**Exercice 3.** Pour 1., comment passer de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$ ? Pour 2., se ramener à 1. plutôt que refaire le raisonnement. Pour 3.,  $f$  doit être constante sur l'ensemble des valeurs de toute suite  $(x^{2^n})$  ou  $(x^{2^{-n}})$ .

**Exercice 6.** Ne pas oublier le théorème de la limite monotone, pour les fonctions.

**Exercice 8.** L'hypothèse sur la limite implique que si  $x$  est suffisamment grand, le numérateur  $f(x)$  croît au plus en  $\varepsilon x$ , où  $\varepsilon > 0$  est fixé. Où intervient l'hypothèse de croissance ?

**Exercice 10.** En un point de discontinuité d'une fonction monotone  $f$ ,  $f$  fait un saut. Comment étiqueter ces sauts par un rationnel ?

**Exercice 14.** Il faut se ramener au comportement de  $f$  sur un segment. Attention ! il faut s'assurer que  $f$  prend des valeurs plus grandes, hors du segment.

**Exercice 21.** Se demander pourquoi il n'existe pas nécessairement d'injection de  $E$  dans  $\mathbb{Q}$ . Ensuite, pour construire l'injection, associer à  $y \in f(E)$  un rationnel proche d'un antécédent de  $y$ .

**Exercice 23.** Pour 1., on cherche à appliquer un TVI à  $g : x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$ , mais sur quel intervalle ? Pour 2., pour construire un contre-exemple, considérer une déformation d'une fonction  $\alpha$ -périodique.

**Exercice 32.** Pour manipuler les sup, il est plus agréable d'écrire des inégalités valables pour tout  $t$  et de passer au sup ensuite.

**Exercice 33.** Se ramener au comportement sur un segment par des petits sauts.