

(16) On veut mg g est continue.

Il est + simple de

- "partager" de f
- ne pas utiliser le thm de la limite monotone ($a_n \dots$)

Soit $a \in]0, 1[$. Mg g est continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$.

Par continuité de f en a ,
| $\exists \delta > 0 : \forall x \in [0, 1],$
 $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Considérons $x \in [0, 1]$ tq $|x - a| < \delta$.

(1) Cas où $x \geq a$.

$$g(x) = \sup \{ f(t), t \in [0, a] \} \cup \{ f(t), t \in [a, x] \}$$

$$\text{Ici, } g(x) = \max(g(a), \sup \{ f(t), t \in [a, x] \})$$

Or, $\forall t \in [a, x], |t - a| < \delta$ donc

$$\begin{aligned} |f(t) - f(a)| &< \varepsilon \\ \text{donc } f(t) &< f(a) + \varepsilon \\ &< g(a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \underline{g(x)} \leq g(a) + \varepsilon.$$

Et $\underline{g(x)} \geq g(a)$ car g croissante.

$$\textcircled{2} \text{ Cas où } x < a.$$

De même, $g(a) = \max(g(a), \sup\{f(t), t \in [x, a]\})$

Or, si $t \in [x, a]$,

$$f(t) \leq f(a) + \varepsilon \leq f(x) + 2\varepsilon \leq g(x) + 2\varepsilon.$$

$$\text{Donc } \underline{g(a)} \leq \underline{g(x) + 2\varepsilon}.$$

$$\text{et } \underline{g(a)} \geq g(x) \text{ car } g \text{ croissante.}$$

Dans les deux cas, on a donc :
 $\forall x \in [0, 1], |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < 2\varepsilon.$
 C'est à changer ε , cela montre la continuité de g en a .

On adapte le raisonnement à $a = 0$ ou $a = 1$ en ne regardant que
 ① ou ②.

Rmq: on peut simplifier un peu l'argument en utilisant que f est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par u.c. $\exists \delta > 0$:

$$\forall x, y \in [0, 1], |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Soient $x < y \in [0, 1]$

Par $\nearrow$, $g(x) < g(y)$

De +,

$$g(y) = \max\left(g(x), \sup_{t \in [x, y]} (f(t))\right).$$

Si $t \in [x, y]$

$$\begin{aligned} f(t) &< f(x) + \varepsilon & (\text{car } |t - x| < \delta) \\ &< g(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, $g(y) < g(x) + \varepsilon$.

Cal: $|y - x| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$
Ceci montre que g est
(uniformément) continue.