

Semaine 11 - Continuité, dérivabilité

1 Continuité

1.1 Reprise du programme précédent

1.2 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

- Continuité uniforme
- Théorème de Heine
- Fonctions lipschitziennes ; elles sont uniformément continues
- Fonction contractante
- Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est contractante de I dans I ; I intervalle fermé

1.3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite, continuité pour une fonction à valeurs complexes
- Théorèmes généraux

2 Dérivabilité, résultats généraux

- Nombre dérivé, interprétation graphique, interprétation cinématique, équation de la tangente
- Dérivée à gauche, dérivée à droite
- Notion de développement limité à l'ordre 1
- Si une fonction est dérivable en a , elle est continue en a
- Fonctions de classe \mathcal{D}^k , de classe \mathcal{C}^k .
- Exemple. Étude de la famille de fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin(1/x)$.
- Opérations usuelles sur les dérivées, stabilité de la classe \mathcal{C}^k par combinaisons linéaires, produits, quotients, compositions
- Dérivée d'une bijection réciproque ; la réciproque d'une fonction de classe \mathcal{C}^k est de classe \mathcal{C}^k

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

- Extremum local, point critique

- Si f est dérivable en un point a où est atteint un extremum local, et si a n'est pas une borne de l'intervalle de définition de f , alors a est un point critique de f
- La réciproque est fausse.
- Théorème de Rolle, interprétation graphique, interprétation cinématique
- Théorème des accroissements finis, interprétation graphique, interprétation cinématique
- Inégalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes.
Démonstration non exigible.

4 Applications des accroissements finis

- Variations de fonctions et signe de la dérivée
- Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment est lipschitzienne
- Théorème sur la limite de la dérivée
- Théorème de prolongement des applications de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

5 Questions de cours

- Théorème des bornes atteintes, théorème de Heine
- Calcul en un point de la dérivée d'une bijection réciproque
- Étude locale de la régularité d'une fonction
- Théorème de Rolle
- Théorème et inégalité des accroissements finis (cas réel)