

## Semaine 11 - Continuité, dérivabilité

## 1 Continuité

### 1.1 Reprise du programme précédent

### 1.2 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

- Continuité uniforme
- Théorème de Heine
- Fonctions lipschitziennes ; elles sont uniformément continues
- Fonction contractante
- Suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est contractante de  $I$  dans  $I$  ;  $I$  intervalle fermé

### 1.3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite, continuité pour une fonction à valeurs complexes
- Théorèmes généraux

## 2 Dérivabilité, résultats généraux

- Nombre dérivé, interprétation graphique, interprétation cinématique, équation de la tangente
- Dérivée à gauche, dérivée à droite
- Notion de développement limité à l'ordre 1
- Si une fonction est dérivable en  $a$ , elle est continue en  $a$
- Fonctions de classe  $\mathcal{D}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- Exemple. Étude de la famille de fonctions  $f_n : x \mapsto x^n \sin(1/x)$ .
- Opérations usuelles sur les dérivées, stabilité de la classe  $\mathcal{C}^k$  par combinaisons linéaires, produits, quotients, compositions
- Dérivée d'une bijection réciproque ; la réciproque d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  est de classe  $\mathcal{C}^k$

## 3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

- Extremum local, point critique

- Si  $f$  est dérivable en un point  $a$  où est atteint un extremum local, et si  $a$  n'est pas une borne de l'intervalle de définition de  $f$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$
  - La réciproque est fausse.
  - Théorème de Rolle, interprétation graphique, interprétation cinématique
  - Théorème des accroissements finis, interprétation graphique, interprétation cinématique
  - Inégalité des accroissements finis
  - Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes.
- Démonstration non exigible.*

## 4 Applications des accroissements finis

- Variations de fonctions et signe de la dérivée
- Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment est lipschitzienne
- Théorème sur la limite de la dérivée
- Théorème de prolongement des applications de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

## 5 Questions de cours

- Théorème des bornes atteintes, théorème de Heine
- Calcul en un point de la dérivée d'une bijection réciproque
- Étude locale de la régularité d'une fonction
- Théorème de Rolle
- Théorème et inégalité des accroissements finis (cas réel)