Dérivabilité, convexité

Jeremy Daniel

> Problem 1 : The Relation of the Flowing Quantities to one another being given, to determine the Relation of their Fluxions
>
> Newton, *The Method of Fluxions and Infinite Series*

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Nombre dérivé)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction

$$\tau_a(f) : \begin{cases} I - \{a\} & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

admet une limite finie en a. Cette limite est le nombre dérivé de f en a.

Notation 1.2
On le note $f'(a)$, ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Remarque 1.3
Interprétation graphique : $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f, au point $\big(a, f(a)\big)$. Cette tangente a donc pour équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Remarque 1.4
Interprétation cinématique : considérons une particule se déplaçant se déplaçant au cours du temps le long d'un axe. On note $x(t)$ sa position au temps t. Alors, $x'(t_0)$ est la vitesse instantantée de la particule au temps t_0.

Remarque 1.5
Par simple changement de variable, on a

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Proposition 1.6 (Dérivée d'une fonction à valeurs complexes)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, soit $a \in I$.
Alors, f est dérivable en a ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a ; dans ce cas,

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a).$$

Proposition 1.7 (Interprétation comme développement limité à l'ordre 1)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $a \in I$. Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Réciproquement, s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, quand x tend vers a,

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + c(x-a) + o(x-a),$$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = c$.

Remarque 1.8
Il peut être plus agréable d'écrire ce développement limité en centrant en a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h),$$

quand h tend vers 0.

Définition 1.9 (Dérivée à gauche/dérivée à droite)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $a \in I$ tel que $a \neq \sup I$. On dit que f est dérivable à droite en a si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.
De même pour la dérivée à gauche.

Remarque 1.10
Ainsi, f est dérivable à droite en a ssi $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a.

Notation 1.11
Quand elles existent, on peut noter $f'_d(a)$ la dérivée à droite de f en a et $f'_g(a)$ la dérivée à gauche de f en a.

Proposition 1.12
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $a \in I$.
- *Si a n'est pas une borne de I, f est dérivable en a ssi $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont égales. Alors, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*
- *Si $a = \sup(I)$, f est dérivable en a ssi $f'_g(a)$ existe. Alors, $f'(a) = f'_g(a)$.*
- *Énoncé analogue si $a = \inf(I)$.*

Proposition 1.13 (Dérivable $\implies$ continu)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $a \in I$. Si f est dérivable/dérivable à gauche/dérivable à droite en a, alors f est continue/continue à gauche/continue à droite en a.

Attention !
Notons $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Alors, f est dérivable à droite en 1 (la dérivée est nulle), mais elle n'est pas dérivable à gauche. Cependant, la dérivée de f, qu'on peut définir sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ est identiquement nulle ; en particulier, cette dérivée admet une limite à gauche en 1.

Définition 1.14 (Fonction dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on note $f' : I \to \mathbb{K}, x \mapsto f'(x)$ son application dérivée.

Notation 1.15
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Définition 1.16 (Fonctions de classe $\mathcal{D}^k$ - HP)
On définit récursivement les ensembles $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$, pour $k \geq 1$:
- $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$;
- Pour $k \geq 2$, $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$ si f est dérivable sur I et si $f' \in \mathcal{D}^{k-1}(I, \mathbb{K})$.

Définition 1.17 (Dérivée k-ème)
Si $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$, on définit récursivement $f^{(i)}$, pour $i \in [\![0, k]\!]$ par : $f^{(0)} = f$ et

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!], f^{(i+1)} = (f')^{(i)}.$$

Remarque 1.18
On peut montrer que si $f \in \mathcal{D}^{k+l}(I, \mathbb{R})$, alors $f^{(k)} \in \mathcal{D}^l(I, \mathbb{R})$ et $\left(f^{(k)}\right)^{(l)} = f^{(k+l)}$.

Définition 1.19 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$ telles que $f^{(k)}$ est continue. On note aussi $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.

Remarque 1.20
Pas abus de langage, on dit que les fonctions de $\mathcal{D}^k$ sont k fois dérivables et que celles de

$\mathcal{C}^k$ sont k fois continûment dérivables.

Remarque 1.21
On a une chaîne d'inclusions :

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^2(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}).$$

On montrera que toutes ces inclusions sont strictes.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.22 (Opérations élémentaires, en un point)
Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- *Si* $f(a) \neq 0$, $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f(a)^2}$

Proposition 1.23 (Composition, en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $g : J \to \mathbb{K}$. On suppose que $f(I) \subset J$, que f est dérivable en $a \in I$ et que g est dérivable en $b = f(a)$.
Alors, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$.

Corollaire 1.24 (Stabilité de la classe $\mathcal{C}^k$)
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est stable par combinaison linéaire, par produit, par quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas), par composition.
En particulier, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

Remarque 1.25
On pourrait dire de même pour les fonctions de classe $\mathcal{D}^k$, où $k \geq 1$.

Théorème 1.26 (Linéarité et formule de Leibniz)
Soient $f, g \in \mathcal{D}^p(I,\mathbb{K})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:
- $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$;
- $(fg)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$.

Remarque 1.27
La formule de Faà di Bruno donne les dérivées d'ordre supérieur d'une composée de fonctions. Elle a peu d'intérêt pratique en raison de sa complexité combinatoire.

Lemme 1.28 (Dérivée de la bijection réciproque, en un point)
Soit $f : I \to J$ une bijection, dérivable en $a \in I$.
Alors, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Remarque 1.29
Si $f'(a) = 0$, la courbe représentative de f a une tangente horizontale au point $(a, f(a))$. Alors, la courbe représentative de f^{-1} a une tangente verticale au point $(f(a), a)$, ce qui se traduit par la non-existence d'une dérivée en $f(a)$.

Théorème 1.30 (Dérivée de la bijection réciproque)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est injective, que $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ – pour un $k \geq 1$ – et que f' ne s'annule pas. Alors, $f : I \to J = f(I)$ est bijective, $f^{-1} \in \mathcal{D}^k(J, \mathbb{R})$ et

$$\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Remarque 1.31
Autrement dit, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Proposition 1.32 (Classe $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions usuelles)
Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition, à l'exception de :
- *Pour $\alpha \geq 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est défini sur $\mathbb{R}_+$ mais de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$;*
- arccos *et* arcsin *sont définies sur* $[-1, 1]$, *mais de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur* $]-1, 1[$;
- argch *est définie sur* $[1, +\infty[$ *mais de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur* $]1, +\infty[$.

Exercice 1.33
Soit $\alpha \geq 0$. Déterminer plus précisément la classe de $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.34
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer la classe de f_n.

2 Théorèmes de Rolle et accroissements finis

2.1 Extrema locaux et dérivée nulle

Définition 2.1 (Extremum local)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On dit que

- f admet un maximum local en a si
$$\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I, f(a) \geq f(x).$$
- f admet un minimum local en a si
$$\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I, f(a) \leq f(x).$$
- f admet un extremum local en a si elle admet un minimum ou maximum local en a.

DÉFINITION 2.2 (Point critique)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Un point $a \in I$ est un point critique de f si f' est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

PROPOSITION 2.3 (Extremum local et annulation de la dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$, distinct des bornes de I. On suppose que f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a. Alors a est un point critique de f.

ATTENTION !
La réciproque est fausse : considérer $x \mapsto x^3$ en 0.

ATTENTION !
Cette proposition donne un critère pratique pour rechercher les extrema locaux en des *points intérieurs* de l'intervalle de définition. Ainsi, $f : x \mapsto x$ défini sur $[0,1]$ atteint son minimum en 0 mais $f'(0) = 1$.

PROPOSITION 2.4 (Sens de l'accroissement local)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable en $a \in I$. On suppose $f'(a) \neq 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I$, $f(x) - f(a)$ a le signe de $f'(a)(x-a)$.

ATTENTION !
Il n'est pas vrai en général qu'une fonction de dérivée non nulle en a est monotone au voisinage de a.

EXERCICE 2.5
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 1$, mais que f n'est monotone sur aucune intervalle contenant 0.

THÉORÈME 2.6 (Théorème de Rolle)
Soit $I = [a,b]$ un segment, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 2.7
Interprétation graphique : la courbe représentative de f a une tangente horizontale.

Remarque 2.8
Interprétation cinématique : si une particule se déplace sur un axe et revient à son point de départ, sa vitesse instantanée a été nulle quelque part.

Attention !
Le théorème de Rolle n'a pas d'analogue pour les fonctions à valeurs complexes. La différence – dans l'interprétation cinématique – vient de ce que la particule peut se déplacer le long d'un cercle et ainsi toujours garder une vitesse non nulle.

2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.9 (Formule des accroissements finis)
Soit $I = [a, b]$ un segment, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, $\exists c \in]a, b[: f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 2.10
Interprétation graphique : il existe une tangente à la courbe représentative de f, parallèle à la sécante passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.

Remarque 2.11
Interprétation cinématique : si une particule se déplaçant le long d'un axe a eu une vitesse moyenne v sur son parcours, il existe un moment où sa vitesse instantanée était v.

Corollaire 2.12 (Inégalité des accroissements finis)
Avec les notations précédentes, on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$. Alors, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Remarque 2.13
Si la vitesse instantée est bornée par une constante, alors la vitesse moyenne est bornée par la même constante.

Proposition 2.14 (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

3 Applications des accroissements finis

3.1 Signe de la dérivée et variations

Définition 3.1 (Intérieur d'un intervalle)
Si I est un intervalle, on note $\mathring{I}$ son intérieur, défini comme l'intervalle I privé de ses bornes.

Théorème 3.2 (Signe de la dérivée et variations)
Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors,
- *f est croissante ssi $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$;*
- *f est décroissante ssi $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leq 0$;*
- *f est constante ssi $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0$.*

Proposition 3.3 (Dérivée et stricte monotonie)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.
- *Si pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante ;*
- *Si pour tout $x \in \mathring{I}$ $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.*

Attention !
La réciproque est fausse. Penser de nouveau à $x \mapsto x^3$.

Remarque 3.4
Si $f' > 0$, sauf en un nombre fini de points où elle est nulle, on a encore f strictement croissante. La conclusion est encore vraie si on suppose seulement que l'ensemble des points où la dérivée de f est nulle ne contient pas d'intervalle non trivial.

3.2 Dérivée et lipschitzianité

Remarque 3.5
L'inégalité des accroissements finis montre que si $|f'|$ est borné par M, alors f est M-lipschitzienne.

Théorème 3.6 (Lipschitzianité des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment)
Soit $I = [a, b]$ un segment. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f est M-lipschitzienne, avec $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Remarque 3.7
Sous les mêmes hypothèses, si $|f'| < 1$ sur $[a, b]$, alors f est contractante. En effet, comme $|f'|$ atteint son maximum, on a $\sup |f'| = K < 1$ et f est K-lipschitzienne.

Exercice 3.8
Étudier la suite récurrente définie par $u_0 \geq 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$.

3.3 Théorème d'extension de la régularité

Proposition 3.9 (Limite de la dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On suppose f continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$.
Si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Corollaire 3.10 (Théorème d'extension $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On suppose f continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$.
Si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 3.11 (Théorème d'extension $\mathcal{C}^k$ - HP)
Soit I un intervalle, $a \in I$. Soit $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie α_i en a.
Alors, f se prolonge par continuité en a par $f(a) = \alpha_0$. En notant encore f ce prolongement, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}(a) = \alpha_i$.

Exercice 3.12
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 Convexité

4.1 Généralités

Définition 4.1 (Partie convexe du plan)
Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On dit que A est convexe si, $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in A$.

Définition 4.2 (Épigraphe d'une fonction)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. L'épigraphe de f est la partie $\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.

Proposition 4.3 (Fonction convexe)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'épigraphe $\mathcal{E}_f$ est une partie convexe.*
2. *$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.*

Quand ceci est vérifié, on dit que f est une fonction convexe.

Remarque 4.4
Graphiquement, cela revient à dire que f est convexe ssi pour tous $x, y \in I$, la courbe représentative de f est en dessous de la corde passant par les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$.

Définition 4.5 (Fonction concave)
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si $-f$ est convexe. C'est équivalent à

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], f\big((1-t)x + ty\big) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Remarque 4.6
Tous les théorèmes seront énoncés sur les fonctions convexes. Ceux sur les fonctions concaves s'en déduisent en considérant la fonction opposée.

Théorème 4.7 (Inégalité des pentes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *f est convexe ;*
2. *Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a(f) : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, définie sur $I - \{a\}$ est croissante ;*
3. *Pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Remarque 4.8
Soit f une fonction convexe sur I, soient $a < b$ deux points de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{D}$ la sécante à la courbe passant par les points d'abscisse a et b. Alors, $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$ sur $[a, b]$ (par définition de la convexité) mais au-dessus hors de $[a, b]$.

Théorème 4.9 (Inégalité de Jensen)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels positifs de somme 1, soient $x_1, \ldots, x_n \in I$. Alors, $f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$.

Remarque 4.10
Ainsi, si f est convexe, alors l'image d'un barycentre des points x_k est inférieure au barycentre des images $f(x_k)$, affectées des mêmes poids.

4.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 4.11 (Fonctions dérivables convexes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors, f est convexe ssi f' est croissante.

Remarque 4.12
Si f est convexe, son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

Théorème 4.13 (Fonctions deux fois dérivables convexes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors, f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Remarque 4.14
C'est le critère pratique pour démontrer qu'une fonction est convexe. Utiliser un argument de convexité pour démontrer des inégalités simples entre fonctions – notamment quand l'un des membres est une fonction affine – est bien plus rapide que de faire une étude de fonction classique consistant à étudier les variations des dérivées première et seconde.

Exemple 4.15
Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $\dfrac{2}{\pi} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

Exercice 4.16
Montrer que ln est concave. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \big(\prod_{i=1}^{n} x_i\big)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$