Dérivabilité

1 Calculs de dérivées

EXERCICE 1. ○○○ *Propriétés de la dérivée*
Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? impaire ? périodique ?

EXERCICE 2. ◐○○ *Calculs de dérivées n-èmes*
Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto a^x$ (où $a > 0$) ;
2. $g : x \mapsto x\exp(x)$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;
4. $k : x \mapsto \exp(x\sqrt{3})\cos(x)$;
5. $l : x \mapsto x^2\sin(x)$.

EXERCICE 3. ♣/♢ – ◐○○ *Équation d'une tangente*
Montrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ ont une unique tangente commune et en donner son équation.

EXERCICE 4. ◐○○ *Valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$*
Soit n un entier. On considère $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n(1-x)^n$.

1. Déterminer $f_n^{(n)}$ et calculer le coefficient devant x^n dans cette expression.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

EXERCICE 5. ●◐○ *Étude de la classe d'une fonction*
Étudier la classe des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x > 0 \\ \cos x - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

EXERCICE 6. ♣ – ●◐○ *Dérivée seconde d'une réciproque*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.

2 Dérivabilité ponctuelle

EXERCICE 7. ♢ – ●○○ *Une variante du taux d'accroissement*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$.

EXERCICE 8. ♣ – ●○○ *Une autre variante*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. Soient $a, b > 0$. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a+b)h}$.

EXERCICE 9. ♢ – ●◐○ *Dérivabilité de la valeur absolue et du max*
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction dérivables en x_0. Donner une condition nécessaire et suffisante

1. Sur f ; pour que $|f|$ soit dérivable en x_0.
2. Sur f et g ; pour que $\max(f, g)$ soit dérivable en x_0.

EXERCICE 10. ●◐○ *Recollement de fonctions dérivables*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE 11. ♣/♢ – ●●○ *Limite de* $\sum f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$
Soit f une fonction dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$.

1. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. En déduire la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})$ quand n tend vers $+\infty$.

3 Théorème de Rolle

EXERCICE 12. ◐○○ *Annulation de* $f^{(n)}$
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
Montrer que si f s'annule $n+1$ fois, alors $f^{(n)}$ s'annule.

EXERCICE 13. ●○○ *Rolle itéré*
Soient $n \geq 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(1) = 0$ et que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

EXERCICE 14. ●○○ *Équation* $P(x) = e^x$
Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15. ●○○ *Où est Rolle ?*
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $4ax^3 + 3ax^2 + 2cx = a + b + c$.

EXERCICE 16. ●◐○ *Rolle à l'infini*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f tend vers une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

EXERCICE 17. ♣/♢ – ●◐○ *Tangente passant par l'origine*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$ et qu'il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que la tangente en x au graphe de f passe par l'origine.

EXERCICE 18. ♣ – ●●◐ *Trouvez la bonne fonction*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f''(c) = f(c)$.

4 Théorème des accroissements finis

EXERCICE 19. ◐○○ *Inégalité des accroissements finis*
Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x - y|$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+ : x \leq e^x - 1 \leq xe^x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq \mathrm{ch}(x) - 1 \leq x\,\mathrm{sh}(x)$.

EXERCICE 20. ●○○ *Équivalent de la série harmonique*

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ et en donner un équivalent.
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

EXERCICE 21. ●◐○ *Fonctions α-Hölderiennes*
Soit $\alpha > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite α-Hölderienne si

$$\exists C > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Si $\alpha > 1$, quelles sont les fonctions α-Hölderiennes ?

EXERCICE 22. ♣ – ●◐○ *Règle de l'Hôpital*

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. On suppose que $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = 0$ et que g et g' ne s'annulent pas sur $I - \{x_0\}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
3. En déduire les limites $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$, où $a, b, c, d > 0$ et $c \neq d$; $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin x - \sin(1/x)}{e^x - e^{1/x}}$.

EXERCICE 23. ♣ – ●◐○ *Une limite sympathique*
Calculer la limite de la suite $\left(\dfrac{n^2}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1})\right)_n$.

EXERCICE 24. ●●○ *Comportement à l'infini d'une fonction et de sa dérivée.*
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction dérivable.

a) On suppose $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} f'$?

b) On suppose $\lim\limits_{+\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} f'$?

c) Soit $\alpha>0$. On suppose que $f'\geq\alpha$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} f$?

d) On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f'=\ell>0$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} f$?

e) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} f'$?

f) On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f'=\ell$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$?

EXERCICE 25. ♣ – ●●◐ *Un raffinement de l'égalité des accroissements finis*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f''(0)\neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[-\{0\},\exists!\theta_x\in]0,1[: f(x)=f(0)+xf'(\theta_x x).$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\theta_x=1/2$.

5 Dérivabilité - Autres exercices

EXERCICE 26. ●○○ $\sup\limits_n \sqrt[n]{n}$
Calculer $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sqrt[n]{n}$.

EXERCICE 27. ♢ – ●◐○ *Nombre fini de points d'annulation*
Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout x de $[0,1]$ tel que $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$. Montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

EXERCICE 28. ●◐○ *Un lemme de factorisation*
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'(0)=0$.
Montrer qu'il existe $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=g(x^2)$.

EXERCICE 29. ●●○ *Un contre-exemple*
On considère la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, x\mapsto x+2x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que l'on notera $\widetilde{f}$.
2. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner sa dérivée.
3. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel f est croissante.
4. En déduire que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 30. ●●○ *Fonction plateau*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$.

2. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ non nulle telle que h est nulle sur $\mathbb{R} - S$.

Exercice 31. ♣/♢ – ●●○ *Dérivée d'une fonction positive*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n f'(x_n) = 0$.

Exercice 32. ♣/♢ – ●●○ *Premier retour à zéro*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ et $f(1) < 0$.
Montrer qu'il existe un premier temps de retour de f à 0, c'est-à-dire :

$$\exists t_0 \in]0,1[: f(t_0) = 0 \text{ et } \forall t \in]0, t_0[, f(t) \neq 0.$$

Montrer que cette propriété est fausse si on suppose seulement $f'(0) \geq 0$.

Exercice 33. ♣/♢ – ●●◐ *Théorème de Darboux*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : $\forall a, b \in I, \forall y \in [f'(a), f'(b)], \exists x \in [a,b] : f'(x) = y$.

Exercice 34. ♣ – ●●◐ $P + P' + \cdots + P^{(n)}$
Soit P une application polynomiale de degré n. On note $Q : x \mapsto P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x)$.
Montrer que si P est à valeurs positives, alors Q aussi.

Indications

Exercice 3. Écrire les équations des tangentes aux deux courbes en deux points (a priori distincts) x_1 et x_2.

Exercice 7. Travailler l'expression pour lever l'indétermination ; ou utiliser un développement limité.

Exercice 9. Pour 2., peut-on se ramener à 1. ?

Exercice 11. Approcher f par son DL à l'ordre 1 en 0 ; bien montrer que le terme d'erreur tend vers 0 quand $n \to +\infty$

Exercice 17. Faire un dessin et bien mettre le problème en équation. Attention ! on ne suppose pas f de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 27. Raisonner par contraposée. Si f a une infinité de points d'annulation, considérer une suite formée par une infinité distincte de ces points et en extraire une sous-suite convergente.

Exercice 31. Distinguer selon que f' s'annule ou pas.

Exercice 32. Considérer la borne inférieure des $t > 0$ tels que $f(t) = 0$. Pourquoi cette borne existe-t-elle ? est-elle différente de 0 ? est-elle atteinte ?

Exercice 33. Comme pour la preuve du TVI, considérer le cas particulier où $f'(a)f'(b) \leq 0$ et où on cherche $x \in [a,b]$ tel que $f'(x) = 0$. Faire un dessin.