DS 4 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Équation de d'Alembert

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$ et que, si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

On suppose désormais que $f(0) = 1$.

2. Montrer que f est paire.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{\delta}{2^q}\right) > 0$.

On fixe un tel δ et on suppose que $f(\delta) \in]0, 1[$. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ tel que $\cos\theta = f(\delta)$.

4. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{\delta}{2^q}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right)$.
5. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(f\left(\dfrac{n\delta}{2^q}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
6. En déduire que, pour tous $n, q \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{n\delta}{2^q}\right) = \cos\left(\dfrac{n\theta}{2^q}\right)$.
7. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \cos\left(\dfrac{x\theta}{\delta}\right)$.

Avec δ comme dans la question 3, on suppose maintenant que $f(\delta) \geq 1$; on peut alors trouver $\theta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\operatorname{ch}\theta = f(\delta)$. On montrerait de façon analogue que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{x\theta}{\delta}\right)$.

8. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

2 Exercice – Idéaux maximaux d'un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit qu'une partie I de A est un idéal de A si

- I est un sous-groupe de $(A, +)$;
- $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$.

1. Montrer que $I \subset \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ ssi I est de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un entier naturel n.
2. Soient A un anneau, I un idéal de A.
   Montrer que si I contient un élément inversible de A, alors $I = A$.
3. En déduire l'ensemble des idéaux de A, quand A est un corps.

Un idéal I d'un anneau A est maximal s'il est distinct de A et si les seuls idéaux J de A tels que $I \subset J \subset A$ sont $J = I$ et $J = A$.

4. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.
5. Dans cette question, p désigne un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b}, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \nmid b\right\}$[1].
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
   (c) Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ a un unique idéal maximal, que l'on précisera.
6. Dans cette question, on note A l'anneau des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les inversibles de A.

   Pour tout $x \in [0, 1]$, on note I_x l'ensemble des f dans A telles que $f(x) = 0$.

   (b) Montrer que I_x est un idéal maximal de A, pour tout $x \in [0, 1]$.

   On cherche à montrer réciproquement que tout idéal maximal de A est de cette forme.
   Soit I un idéal maximal de A ; on suppose par l'absurde que : $\forall x \in [0, 1], I_x \neq I$.

   (c) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $f_x \in I$ et $\delta_x > 0$ tel que
   $$\forall y \in [0, 1], |y - x| \leq \delta_x \implies f_x(y) \neq 0.$$

   Pour tout $x \in [0, 1]$, on note J_x l'intervalle $[0, 1] \cap [x - \delta_x, x + \delta_x]$.

   (d) Montrer que :
   $$\exists \delta > 0 : \forall y \in [0, 1], \exists x \in [0, 1] : \forall z \in [0, 1], |z - y| \leq \delta \implies z \in J_x.$$
   (e) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ tels que $[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{n} J_{x_k}$.
   (f) Aboutir à une contradiction, en considérant la fonction $f = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}^2$.

[1] La notation $p \nmid b$ signifie : p ne divise pas b.

3 Problème – Nombre de rotation de Poincaré

On désigne par H l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et strictement croissantes, telles que $f(x+1) = f(x) + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.1 Structure de groupe de H

1. Montrer que si $f \in H$, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que H est un groupe, pour la loi de composition $\circ$.

Dans la suite, si $f \in H$ et si $n \in \mathbb{Z}$, on notera f^n le n-ème itéré de f pour la loi $\circ$.

3.2 Définition de $\rho(f)$

Soit $f \in H$. On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = f(x) - x$.

3. Montrer que ϕ est périodique de période 1.

4. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $-1 < \phi(y) - \phi(x) < 1$.
   On pourra d'abord traiter le cas où $x \leq y < x + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $m_n = \min\left\{f^n(x) - x,\, x \in \mathbb{R}\right\}$ et $M_n = \max\left\{f^n(x) - x,\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

5. Justifier la bonne définition de m_n et M_n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

6. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $m_n + m_p \leq m_{n+p} \leq M_{n+p} \leq M_n + M_p$.

7. En déduire que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{m_k}{k} \leq \dfrac{M_n}{n}$.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n - m_n < 1$.

9. Déduire des deux questions précédentes que $\sup\left\{\dfrac{m_n}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \inf\left\{\dfrac{M_n}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On note $\rho(f)$ cette valeur commune et on l'appelle nombre de rotation de f.

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f^n(x_n) = x_n + n\rho(f)$.

11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < f^n(x) - x - n\rho(f) < 1$.
    En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f^n(x)}{n} \to \rho(f)$, quand $n \to +\infty$.

3.3 Premières propriétés de $\rho(f)$

Soit $f \in H$.

12. Soit g dans H telle que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\rho(g \circ f) = \rho(g) + \rho(f)$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\rho(f^n) = n\rho(f)$.

14. Montrer que $\rho(f)$ est nul ssi f a un point fixe.

On rappelle qu'on désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On définit $\overline{f} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ par $\overline{f}(e^{2i\pi\theta}) = e^{2i\pi f(\theta)}$, pour tout réel θ.

15. Justifier que $\overline{f}$ est bien définie et que c'est une bijection.

16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit l'application $R_\alpha : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$.
Montrer qu'il existe une application $t_\alpha \in H$ telle que $\overline{t_\alpha} = R_\alpha$ et $\rho(t_\alpha) = \alpha$.

17. On suppose que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer[2] que $\overline{f}$ admet une orbite périodique, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\overline{f}^p(z) = z$.

18. Montrer réciproquement que si $\overline{f}$ admet une orbite périodique, alors $\rho(f) \in \mathbb{Q}$.

3.4 Théorème de Poincaré

Soit $f \in H$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\Lambda_f(x) = \{f^n(x) + m, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, on note $\Lambda_{\overline{f}}(z) = \{\overline{f}^n(z), n \in \mathbb{Z}\}$.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{U}$ est dense dans $\mathbb{U}$ si, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers z.

19. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

    i) Il existe un réel x tel que $\Lambda_f(x)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

    ii) Il existe un nombre complexe z dans $\mathbb{U}$ tel que $\Lambda_{\overline{f}}(z)$ est dense dans $\mathbb{U}$.

On dit dans ce cas que f a une orbite dense. On suppose désormais que cette condition est satisfaite et que $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

20. On fixe un réel x tel que $\Lambda_f(x)$ est dense dans $\mathbb{R}$. On note $\Lambda = \{n\alpha + m, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
On définit l'application h par

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda_f(x) & \to & \Lambda \\ f^n(x) + m & \mapsto & n\alpha + m, \end{array} \right.$$

Montrer que h est bien définie et que c'est une bijection strictement croissante.

21. Montrer que h se prolonge de façon unique en une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

22. On note encore h ce prolongement. Montrer[3] que $h \circ f = t_\alpha \circ h$.

[2] Ici aussi, $\overline{f}^p$ désigne le p-ème itéré de $\overline{f}$ pour la loi $\circ$. On admet que $\overline{f}^p = \overline{f^p}$.

[3] C'est le théorème de Poincaré. On dit que f et t_α sont topologiquement conjuguées. En 1932, A. Denjoy a montré que si $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors elle a une orbite dense.